

Федеральное агентство по образованию  
Уральский государственный технический университет–УПИ  
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

**И.Н. Огородников**

# **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПЕРЕНОСА ИОНИЗИРУЮЩИХ ИЗЛУЧЕНИЙ**

Учебное пособие

Издание 2-е, переработанное и дополненное

Екатеринбург  
УГТУ–УПИ  
2010

УДК 539.21:539.12.04  
ББК 22.36/22.383  
О39

Рецензенты:

кафедра высшей математики и физики  
Уральского технического института связи и информатики  
(зав. кафедрой – проф., д-р физ.-мат. наук В.Е. Сидоров);  
зав. лаб. Института промышленной экологии УрО РАН,  
проф., д-р физ.-мат. наук. А.Н. Вараксин

Огородников И.Н.  
О39 Введение в теорию переноса ионизирующих излучений: учебное  
пособие /И.Н. Огородников. 2-е изд., перераб. и доп. Екатеринбу-  
бург: УГТУ-УПИ, 2010. 176 с.  
ISBN 978–5–321–01688–6

Пособие по курсу «Теория переноса ионизирующих излучений» предназна-  
чено для студентов физико-технического факультета, обучающихся по  
специальностям «Радиационная безопасность человека и окружающей сре-  
ды», «Инженерное дело в медико-биологической практике» и направлению  
подготовки бакалавров «Биомедицинская инженерия». Основная цель посо-  
бия – сформировать у студентов теоретические представления об основных  
закономерностях переноса нейтронного и фотонного излучений в «реактор-  
ном» диапазоне энергий. Рассмотрены классические вопросы теории перено-  
са ионизирующего излучения: уравнение диффузии нейтронов, кинетическое  
уравнение Больцмана, уравнение Пайерлса, многоскоростное уравнение пе-  
реноса, а также некоторые методы и вычислительные схемы разностной ап-  
проксимации уравнений переноса (методы сферических гармоник и дискрет-  
ных ординат) и основы применения метода Монте-Карло в задачах теории  
переноса. Обсуждаются основы применения теории возмущений в задачах  
оптимизации характеристик полей излучений.

Библиогр.: 13 назв. Рис. 45.

ISBN 978–5–321–01688–6

УДК 539.21:539.12.04  
ББК 22.36/22.383

© ГОУ ВПО «Уральский государственный  
технический университет–УПИ», 2000  
© Огородников И.Н., 2000  
© УГТУ–УПИ, 2010  
© Огородников И.Н., 2010

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие основано на односеместровом курсе лекций, читаемых в течение многих лет в Уральском государственном техническом университете для студентов физико-технического факультета, специализирующихся в областях радиационной безопасности человека и окружающей среды, защиты от излучений, радиационной экологии, медицинской физики и т.п. Пособие может быть полезно и для студентов других родственных специальностей. В книге рассмотрены вопросы классической теории переноса ионизирующего излучения, касающиеся основных закономерностей прохождения нейтронного и фотонного излучений в «реакторном» диапазоне энергий: уравнение диффузии нейтронов, кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Пайерлса, многоскоростное уравнение переноса, а также некоторые методы и вычислительные схемы разностной аппроксимации уравнений переноса (методы сферических гармоник и дискретных ординат) и основы применения метода Монте-Карло в задачах теории переноса. Обсуждаются основы применения теории возмущений в задачах оптимизации характеристик полей излучений.

Следует отметить, что теория переноса ионизирующего излучения представляет собой весьма обширную, динамично развивающуюся область знаний. В данное пособие включен лишь ограниченный круг вопросов, выбор и глубина освещения которых продиктованы, в первую очередь, требованиями государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по направлениям 140300 – «Ядерная физика и технологии», 200300 – «Биомедицинская инженерия» и 200400 – «Биомедицинская техника».

В первой главе обсуждаются базовые понятия, необходимые в дальнейшем для построения математических моделей переноса излучения.

Вторая глава посвящена диффузионному подходу, изложенному на примере односкоростного диффузионного уравнения переноса нейтральных частиц (нейтроны или фотоны). Обсуждается использование диффузионного подхода для решения типовых задач расчета источников излучения и критического размера шарового гомогенного ядерного реактора.

В третьей главе дается представление о кинетическом интегродифференциальном уравнении Больцмана. На примере односкоростного уравнения обсуждается специфика его представления в различных геометрических моделях и системах координат.

Четвертая глава посвящена интегральному уравнению Пайерлса. Рассматриваются два подхода к выводу этого уравнения: вывод "из первых принципов" и вывод путем редукции кинетического уравнения Больцмана.

В пятой главе обсуждается метод решения уравнения Больцмана путем разложения в ряд по сферическим гармоникам. Даются представления о сеточных функциях и конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений в целях получения численного алгоритма решения уравнения Больцмана.

В шестой главе обсуждается совокупность методов численного решения уравнения Больцмана, объединенных общим названием "метод дискретных ординат". В качестве примера рассматриваются метод характеристик (метод Владимирова) и  $S_n$ -метод (метод Карлсона).

В седьмой главе обсуждается метод Монте-Карло и основы его применения в теории переноса.

В восьмой главе обсуждается многоскоростное уравнение переноса и ряд специальных вопросов, таких как групповой подход в решении уравнений переноса, сопряженные функции и уравнения, теория возмущений и др.

В девятой главе продемонстрировано использование изученных ранее методов и технологий для оптимизации характеристик полей излучения при решении типовой задачи из области расчета защиты от ионизирующих излучений.

При составлении программы и подготовке лекционного курса нами широко использовался многолетний опыт преподавания и методические материалы для аналогичного курса лекций, читаемого в Обнинском институте атомной энергетики [7, 8], а также компактный, но достаточно строгий университетский курс теории переноса [11], который мы рекомендуем студентам для углубленного изучения теории переноса, подготовки к зачетам и экзаменам.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В данном вводном разделе будут изложены физические аспекты моделирования прохождения излучения в средах.

### 1.1. Среда и излучение

#### 1.1.1. Термины и определения

На протяжении всего курса мы будем использовать систему единиц СГС (сантиметр, грамм, секунда). Такая система является предпочтительной при теоретическом описании многих физических процессов. Приведем для начала формальное определение некоторых терминов, которые будем употреблять в дальнейшем при обсуждении явлений переноса частиц и энергии. В этих определениях будем использовать традиционные обозначения:  $t$  – время,  $N$  – количество частиц,  $V$  – объем,  $S$  – площадь поверхности,  $E$  – энергия.

**Плотность частиц** – количество частиц в единице объема,  $[\text{см}^{-3}]$ ,

$$n = dN/dV.$$

**Поток частиц** – количество частиц, падающих на произвольную поверхность в единицу времени,  $[\text{с}^{-1}]$ ,

$$\Phi = dN/dt.$$

**Плотность потока частиц** – поток частиц, падающих на единичную поверхность,  $[\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}]$ ,

$$\varphi = d\Phi/dS.$$

**Перенос (флюенс) частиц** – количество частиц, падающих на единичную поверхность за все время облучения,  $[\text{см}^{-2}]$ ,

$$\Phi = \int \varphi(t) dt.$$

**Плотность энергии** – энергия поля, заключенная в единице объема,  $[\text{Дж}\cdot\text{см}^{-3}]$ ,

$$W = dE/dV.$$

**Поток энергии** – количество энергии, падающей на произвольную поверхность в единицу времени,  $[\text{Дж} \cdot \text{с}^{-1}] = [\text{Вт}]$ ,

$$\Phi = dE/dt.$$

**Плотность потока энергии** – поток энергии, падающей на единичную поверхность,  $[\text{Дж} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}] = [\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2}]$ ,

$$\varphi = d\Phi/dS.$$

**Перенос (флюенс) энергии** – количество энергии, падающей на единичную поверхность за все время облучения,  $[\text{Дж} \cdot \text{см}^{-2}]$ ,

$$\Phi = \int \varphi(t) dt.$$

**Излучение** – поток энергии или частиц.

**Сила** – направленный поток энергии.

**Интенсивность излучения (яркость)** – плотность потока энергии или частиц.

**Поле ионизирующего излучения** – поток энергии или частиц ионизирующего излучения.

### 1.1.2. Излучение и частицы

Обсудим теперь физическое наполнение некоторых терминов и понятий, которые будут использоваться на протяжении всего курса.

**Излучение** – это фотонное (электромагнитные волны) или корпускулярное (частицы) поле, наблюдаемое вдали от породивших его источников. Мы будем рассматривать перенос только нейтрального (с точки зрения электрического заряда) излучения, т.е. перенос нейтронов или фотонов ( $\gamma$ -квантов). Прохождение заряженных частиц, вообще говоря, также может быть описано уравнениями переноса. Но нейтронное и фотонное излучения представляют наибольший интерес как с практической точки зрения (проникающие излучения, “вынос” энергии из реактора и пр.), так и с теоретической (перенос в “чистом” виде, не осложненном наличием электрического заряда). В дальнейшем изложении под выражением “перенос частиц” будет пониматься как перенос нейтронов, так и перенос фотонов, если не оговорен конкретный тип излучения.

**Фотоны** – это элементы поля: частицы с нулевой массой покоя и единичным спином. Они подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Энергия фотона  $E = h\nu$  и его импульс  $p$  связаны соотношением

$$E = c \cdot p, \quad \text{где } c \text{ – скорость света.} \quad (1.1)$$

**Нейтроны** – точечные частицы, не несущие электрический заряд. Приведенная длина волны нейтрона обычно мала по сравнению с его макроскопическими размерами и средним пробегом, поэтому нейтрон полностью описывается своим местоположением (координатой) и скоростью  $v$ . Для нейтронов очень низких энергий длина волны становится достаточно большой и он не может быть локализован. Однако в физике реакторов вклад таких нейтронов обычно не является сколько-нибудь существенным. Энергия нейтрона  $E = m \cdot v^2 / 2$  и его импульс  $p$  связаны обычным соотношением

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{где } m \text{ – масса покоя нейтрона.} \quad (1.2)$$

Нейтрон имеет также спин и магнитный момент, что может приводить к поляризации, оказывающей влияние на перенос нейтронов. Данные вопросы относятся к категории специальных и обсуждаются во многих основополагающих монографиях по теории переноса ионизирующих излучений, например в [4]. В большинстве случаев в теории переноса этим эффектом можно пренебречь.

**Энергия.** При получении уравнений переноса и формулировке задач будет подразумеваться “реакторный” диапазон энергии  $E$  частиц, т.е.  $0 < E \leq 18$  МэВ для нейтронов и  $0 < E \leq 11$  МэВ для фотонов. Это энергетический диапазон для “традиционной” теории переноса, в которой квантовыми эффектами пренебрегают.

**Плотности частиц и ядер** также соответствуют переносу в “нормальных”, “земных” условиях, когда плотности переносимых частиц несоизмеримы с плотностью ядер среды. Плотность нейтронов в околореакторном пространстве обычно не превышает  $(10^{12} \div 10^{16}) \text{ см}^{-3}$ , что ничтожно мало по сравнению с плотностью ядер материальной среды  $(10^{22} \div 10^{23}) \text{ см}^{-3}$ . То же самое можно сказать и о плотности фотонов в задачах переноса. Такое соотношение плотностей переносимых частиц и ядер/атомов среды позволяет воспользоваться линейной теорией переноса, т.е. теорией, не учитывающей нейтрон-нейтронные (фотон-фотонные) взаимодействия.

**Взаимодействие частиц со средой.** Для формулировки уравнений вполне достаточна “трехканальная” схема взаимодействия нейтронов с ядрами среды (рис. 1.1). Что касается фотонов – схема может быть еще проще: она состоит из двух каналов (рис. 1.2).

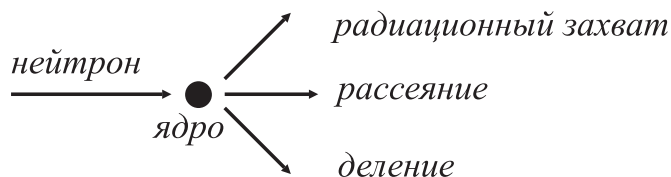


Рис. 1.1. Схема взаимодействия нейтрона с ядром



Рис. 1.2. Схема взаимодействия фотона с атомом материальной среды

**Нейтроны в среде.** Представим себе некоторый объем  $V$ , в котором “вдруг” появляются нейтроны. Если в среде нет делящегося материала, то нейтроны, испытывая рассеяние и поглощение, частично захватятся, а частично выйдут из данного объема (рис. 1.3). В нашей модели траектории нейтронов изображаются отрезками прямых: точки излома соответствуют точкам взаимодействия с ядрами среды. Взаимодействие предполагается мгновенным, так как время взаимодействия действительно ничтожно в сравнении со временем прохождения отрезка траектории.

Если же в среде есть делящийся материал, то картина усложняется (рис. 1.4). Конкурирующие процессы: выход за пределы объема и поглощение, с одной стороны, и появление новых нейтронов в результате деления, с другой, – могут привести к двум полярным результатам: а) исчезновение нейтронов, как и в среде без делящегося материала; б) “лавинообразное” увеличение количества нейтронов – “взрыв”. В принципе возможно равновесное положение, когда количество нейтронов, поглощенных в объеме, плюс количество нейтронов, вынесенных за пределы этого объема, равно количеству нейтронов, созданных в результате реакции деления: это, очевидно, “реактор”.

Рисунок 1.5 иллюстрирует все три сценария развития событий, а также и возможный “рецепт” изготовления “реактора” и “бомбы” посредством окружения исходного объема, в котором реакция затухает, дополнительными слоями делящегося материала.



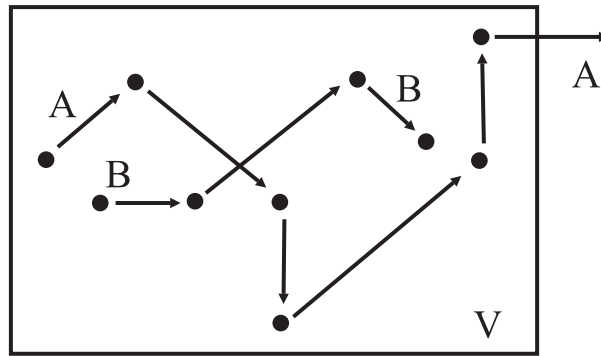


Рис. 1.3. Пример траектории нейтрона в объеме  $V$ , не содержащем делящегося материала:  $A$  – выход нейтрона после рассеяний из объема  $V$ ;  $B$  – поглощение нейтрона внутри объема  $V$

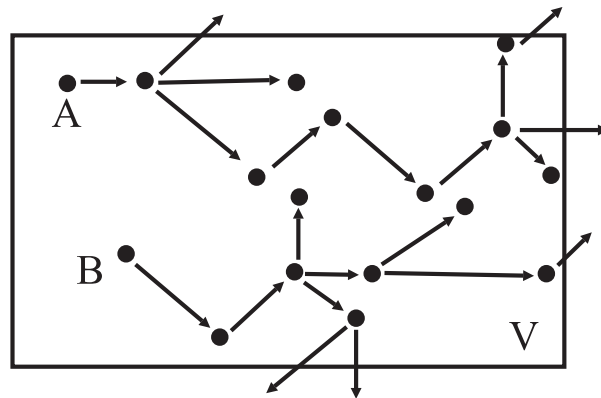


Рис. 1.4. Примеры траекторий нейтронов  $A$  и  $B$  в среде с делящимся материалом

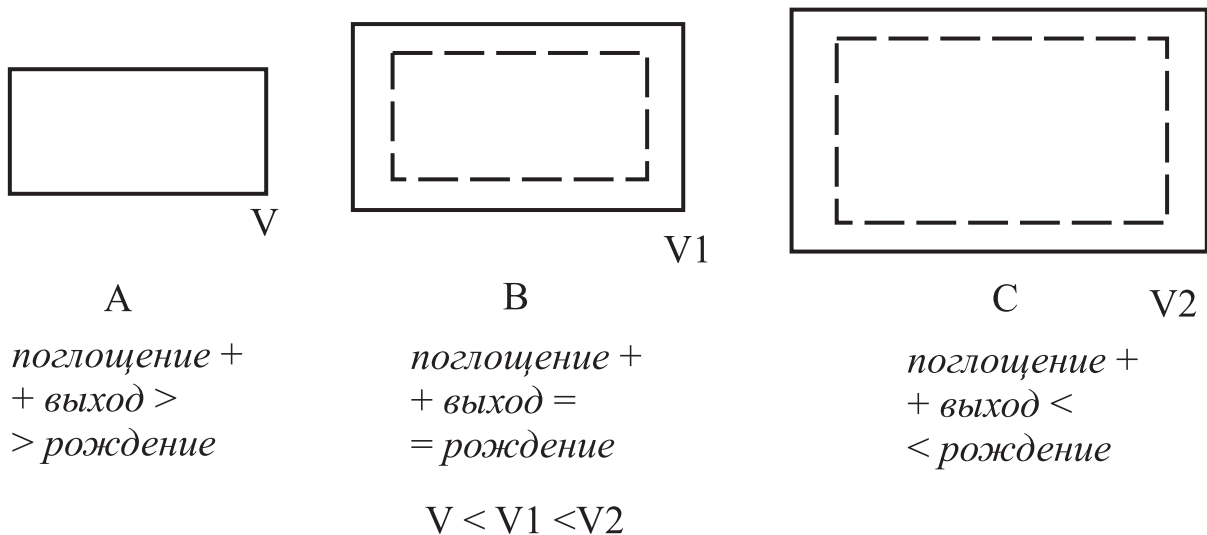


Рис. 1.5. Три возможных сценария в среде с делящимся материалом:  $A$  – затухание;  $B$  – реактор;  $C$  – взрыв

## 1.2. Функции и производные

Для дальнейшего изложения нам потребуется некоторое представление о многомерных областях и функциях областей. Рассмотрим, например, четырехмерную область  $G(V, \Delta E)$ , являющуюся объединением переменного объема  $V$  и переменного диапазона энергии  $\Delta E = E_2 - E_1$ , где  $E_1$  и  $E_2$  – некоторые произвольные точки на шкале энергии. Количество нейтронов  $F(V, \Delta E)$  в объеме  $V$ , энергии которых заключены в диапазоне  $\Delta E$ , является функцией области  $G$ :  $F(G)$ . Функции типа “количество нейтронов” называются аддитивными (лат. *additio* – прибавляю); важнейшие их свойства следуют из определения аддитивной функции области и ее производной.

*Функция области  $F(G)$  называется аддитивной при выполнении следующих условий:*

- а) если  $F(G)$  определена для областей  $G_1$  и  $G_2$ , то она определена и для их объединения  $G_1 \cup G_2$ ;*  
*б) если  $G_1$  и  $G_2$  не имеют общих внутренних точек, т.е. не пересекаются, то  $F(G_1 \cup G_2) = F(G_1) + F(G_2)$ .*

Примеры аддитивных функций: площадь переменной области на плоскости, масса материального тела переменного объема и т.п. – практически все встречающиеся в приложениях функции.

*Производная аддитивной функции  $F(G)$  определяется следующим образом. Пусть область  $G$  стягивается к точке  $M_0 (G \rightarrow M_0, |G| \rightarrow 0)$ , где  $|G|$  – мера области  $G$ ). Если существует предел отношения  $F(G)/|G|$  при  $|G| \rightarrow 0$ , то он называется производной аддитивной функции  $F(G)$  по области  $G$ :*

$$\lim_{G \rightarrow M_0} \frac{F(G)}{|G|} \equiv \frac{dF}{dG}.$$

*Эта производная будет уже функцией точки.*

Подобного рода производные в физике являются обычно плотностями. Так, если  $F(G)$  – масса тела  $G$ , то  $dF/dG$  – плотность вещества этого тела и т.п. В примере, рассмотренном выше, производная количества нейтронов в объеме  $V$ , энергии которых лежат в диапазоне  $\Delta E$ :

$$\lim_{G \rightarrow M_0} \frac{F(G)}{|G|} \equiv \frac{dF}{dG} = n(M_0) \equiv n(x_0, y_0, z_0; E_0), \quad (1.3)$$

называется плотностью нейтронов. Здесь  $M_0$  – четырехмерная точка:

$$M_0(\vec{r}_0, E_0) \equiv M_0(x_0, y_0, z_0; E_0),$$

принадлежащая области  $G$ , а мерой области служит произведение  $|G| = V \cdot |E_0|$ .

По заданной функции точки  $f(M)$  можно восстановить функцию области  $F(G)$ :

$$F(G) = \int_G f(M) dG. \quad (1.4)$$

Если область  $G$  достаточно мала, то можно воспользоваться теоремой о среднем из математического анализа:

$$F(G) \approx f(\bar{M}) \cdot |G|, \quad (1.5)$$

где  $\bar{M}$  – некоторая произвольная точка области  $G$ .

Знание плотности нейтронов во всех точках области является исчерпывающим для многих задач переноса – с помощью плотности могут быть вычислены большинство интересующих нас величин. В частности, количество нейтронов в области  $V$ , энергии которых лежат в диапазоне  $\Delta E$ , получается интегрированием:

$$F(V, \Delta E) = \int_{\Delta E} dE \int_V n(\vec{r}, E) dV. \quad (1.6)$$

Подобным же образом могут быть определены и другие характеристики поля излучения в среде. Для всех этих характеристик функция плотности нейтронов вида (1.3) или более сложная, включающая угловую и временную зависимости, является опорной. В общем случае, если  $X = \{X_i\}$  – вектор переменных функции  $n(\cdot)$ , то любая характеристика  $I_k$  поля излучения может быть записана таким образом:

$$I_k = \int_G n(X) \cdot K(X) dX, \quad (1.7)$$

где  $G$  – некоторая область изменения переменных, а  $K$  – характеристика интересующего нас процесса.

Из этого следует, что определение поля плотности частиц может считаться основной задачей в теории переноса.

В дальнейшем изложении нам понадобится представление о символической дельта-функции Дирака  $\delta(x)$  для действительной переменной  $x$ . Среди ее свойств напомним следующие:

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } a < x_0 < b, \\ 0, & \text{если } x_0 < a \text{ или } x_0 > b, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{если } a < x_0 < b, \\ 0, & \text{если } x_0 < a \text{ или } x_0 > b, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x). \quad (1.10)$$

### 1.3. Источники и геометрии

Источники излучения можно классифицировать по геометрическим параметрам и по энергетически угловому распределению испускаемого излучения. Рассмотрим наиболее простые, “элементарные” источники, суперпозицией которых можно в принципе “собрать” все многообразие встречающихся на практике источников.

**1. Тонкий луч** – точечный мононаправленный источник в точке с координатой, коллимированный в направлении  $\vec{\Omega}_0$  (рис. 1.6,а). Если нормировка излучения “одна частица в секунду”, то выражение для источника

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) \cdot \delta(E - E_0), \quad (1.11)$$

где  $\delta$  – символическая дельта-функция Дирака.

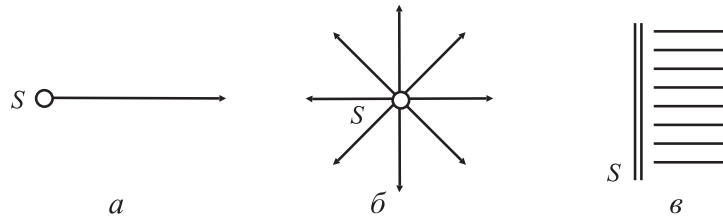


Рис. 1.6. Схематическое изображение источников: а – плоский мононаправленный; б – точечный изотропный; в – плоский мононаправленный

**2. Точечный изотропный моноэнергетический источник** (рис. 1.6,б). В точке с координатой  $\vec{r}_0$  помещен источник, интенсивность излучения которого в единицу телесного угла во всех направлениях одинакова, [с · стер<sup>-1</sup>]:

$$S(\vec{r}, E) = \frac{1}{4\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \delta(E - E_0). \quad (1.12)$$

Излучение нормировано на одну частицу в секунду в один стерадиан.

**3. Плоский мононаправленный моноэнергетический источник** изображен на рис. 1.6,в. Он может быть получен суперпозицией точечных мононаправленных источников на плоскости. Излучение источника может быть направлено параллельно нормали к плоскости (именно в такой ситуации обычно употребляется термин “плоский мононаправленный источник”) или составлять некоторый угол  $\theta_0$  с плоскостью.

Обратившись к выражению (1.11), модифицируем его для данного источника. Плоскость, перпендикулярная некоторому единичному вектору  $\vec{n}$ , задается уравнением  $\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{const}$ . Равенство  $\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_0$  описывает плоскость, перпендикулярную  $\vec{n}$  и проходящую через точку  $\vec{r}_0$ . Излучение плоского мононаправленного источника, испускающего одну частицу в секунду с единицы поверхности, описывается выражением,  $[\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}]$ :

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \delta(\vec{r}\vec{n} - \vec{r}_0\vec{n}) \cdot \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) \cdot \delta(E - E_0). \quad (1.13)$$

Направление вылета частиц коллимировано в направлении  $\vec{\Omega}_0$ , причем угол между нормалью к плоскости источника и направлением вылета определяется его косинусом:  $\cos \theta_0 = (\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{n})$ .

Ограничимся рассмотренными тремя основными источниками. В тех случаях, когда в ходе изложения возникнут источники более сложной конфигурации, они будут определены дополнительно.

Для дальнейшего изложения понадобятся представления об основных геометрических моделях среды. Напомним связь сферической системы координат с декартовой прямоугольной (рис. 1.7). Как видно из рис. 1.7, плоскопараллельная задача характеризуется симметрией по азимутальному углу  $\psi$ ; решение задачи зависит от координаты  $z$  и полярного угла  $\theta$ . На рис. 1.7,б изображены два смежных слоя из различных материалов, размеры которых по осям  $x$  и  $y$  бесконечны; изменению азимутального угла  $\psi$  соответствует поворот вектора  $\vec{r}$  вокруг оси  $z$ .

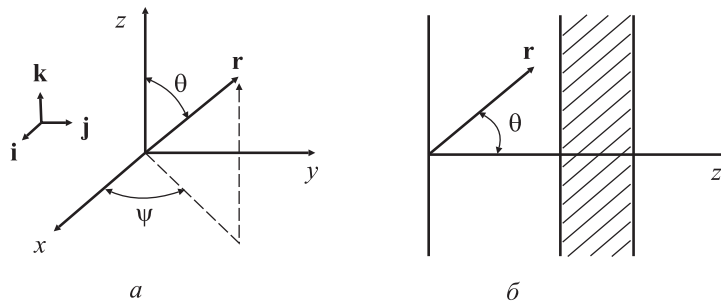


Рис. 1.7. Сферическая и прямоугольные системы координат (а) и схема плоскопараллельной задачи (б)

Каждая точка  $P(x, y, z) \equiv P(\vec{r})$  может быть задана своим радиус-вектором  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.14)$$

формулы преобразования (связи) между системами координат:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}, & x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi; \\ \cos \theta &= z/r, & y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi; \\ \operatorname{tg} \psi &= y/x, & z &= r \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

## 1.4. Реакции и сечения

Введем понятие “сечение ядерной реакции”, рассмотрев простую модель:

- а) в веществе возможен только радиационный захват;  
б) вещество состоит из ядер одного сорта, т.е. является элементом.

Далее вообразим очень тонкий – толщиной в 1 атом – слой вещества и мысленно вырежем из него пластинку. Пусть поверхностная плотность атомов (ядер)  $N_a$  на  $1 \text{ см}^2$  (рис. 1.8). На рисунке изображен участок такой пластинки с поверхностной плотностью 18 ядер·см<sup>-2</sup>. Подсчитаем, какова вероятность нейтрону, пущенному перпендикулярно к пластинке, поглотиться в ней.

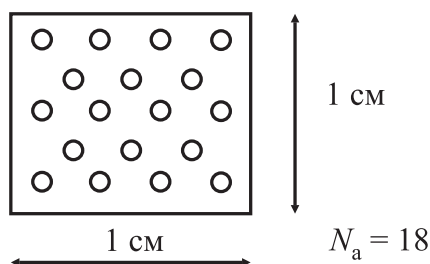


Рис. 1.8. Условная схема одноатомной пластинки для введения понятия “сечение реакции”

Ясно, что эта вероятность зависит от энергии нейтрона. Можно себе представлять, что чем выше энергия (скорость) падающего нейтрона, тем меньше размер изображенных на рис. 1.8 кружков (эффективных размеров ядер), тем меньше вероятность для нейтрона поглотиться. Нейтрон как бы “не успевает” провзаимодействовать с ядром на более высокой скорости.

Пусть  $J_0$  – плотность потока падающего пучка нейтронов, т.е. количество нейтронов, падающих на  $1 \text{ см}^2$  пластинки в 1 с. Если  $J_1$  – плотность потока выходящего из пластинки пучка, то количество актов поглощения в 1 с в пластинке на рис. 1.8:  $C = J_0 - J_1$ . Частота события (поглощения):  $C/J_0 = (J_0 - J_1)/J_0$ ; при большой величине  $J_0$ , т.е. при большом количестве испытаний, частота события близка к его вероятности  $P$ :

$$P = C/J_0 = 1 - J_1/J_0. \quad (1.16)$$

Если, обратившись к рис. 1.8, подсчитаем площадь, перекрываемую ядрами, расположенными в пластинке, каждое из которых имеет эффективную площадь  $\sigma$ , и отнесем суммарную площадь ядер к площади пластинки  $1 \text{ см}^2$ :  $\sigma \cdot N_a / 1 \text{ см}^2$ , то эту величину можно также считать вероятностью для нейтрона поглотиться при прохождении одноатомной пластинки. Приравняем обе вероятности:

$$\sigma \cdot N_a = 1 - J_1/J_0. \quad (1.17)$$

Отсюда выразим величину  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{1 - J_1/J_0}{N_a} \equiv \frac{C}{N_a \cdot J_0}. \quad (1.18)$$

Последнее выражение принимают обычно за определение микроскопического сечения поглощения, и величина сечения должна снабжаться индексом “a”:  $\sigma_a$ . Понятие сечения распространим и на остальные реакции:

$\sigma_a$  – микроскопическое сечение поглощения (“a” – absorption);  
 $\sigma_s$  – микроскопическое сечение рассеяния (“s” – scattering);  
 $\sigma_f$  – микроскопическое сечение деления (“f” – fission),

причем  $\sigma_a + \sigma_s = \sigma$ , где  $\sigma$  – полное микроскопическое сечение взаимодействия. Из определения (1.18) следует, что размерность микроскопического сечения  $\sigma$  равна  $[\text{см}^2]$ . В результате рассмотрения понятия сечения сформулируем его основное свойство:

*микроскопическое сечение ядра  $\sigma$  по отношению к какой-либо реакции есть характеристика ядра, зависящая от энергии налетающего нейтрона.*

Определенные выше микроскопические сечения реакций  $\sigma(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$  называются также *интегральными сечениями*. За единицу измерения сечения принят 1 барн =  $10^{-24} \text{ см}^2$ . Помимо интегральных сечений в описании явлений переноса используют дифференциальные и дважды дифференциальные сечения реакций.

Дифференциальными сечениями реакции называют производные первого порядка от интегрального сечения

$$\frac{d\sigma(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)}{dE}, \quad \frac{d\sigma(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)}{d\Omega}. \quad (1.19)$$

Физический смысл такого сечения – вероятность выхода реакции в расчете на один нейтрон либо в заданный телесный угол  $d\Omega$  вблизи  $\vec{\Omega}$ , либо в заданный энергетический интервал от  $E$  до  $E + dE$ .

Дважды дифференциальное сечение реакции представляет собой смешанную производную второго порядка от интегрального сечения

$$\frac{d^2\sigma(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)}{d\Omega dE}. \quad (1.20)$$

Физический смысл такого сечения – вероятность выхода реакции в расчете на один нейтрон одновременно в заданный телесный угол  $d\Omega$  вблизи  $\vec{\Omega}$  и заданный энергетический интервал от  $E$  до  $E + dE$ . В экспериментальных измерениях чаще всего получают именно дважды дифференциальные сечения реакций, на основании которых далее рассчитывают дифференциальные и интегральные сечения.

## 1.5. Барьер и пучок

Введенное описанным выше способом понятие сечения (см. (1.18)) не является конструктивным: оно не дает “рецепта” получения или измерения сечения. Рассмотрим задачу, решение которой может подсказать путь для экспериментального определения  $\sigma$ .

Пусть слой толщиной  $H$  (рис. 1.9, по осям  $x$  и  $y$  этот слой бесконечен) состоит из материала со следующими свойствами:

- а) в веществе слоя возможно только поглощение;*  
*б) вещество слоя состоит из ядер одного сорта, т.е. из элементов периодической таблицы.*

На грань слоя  $z = 0$  падают перпендикулярно нейтроны, причем плотность потока равна  $J_0$ . Если бы среда не поглощала нейтроны, то в каждом сечении оси  $z$  плоскостью, перпендикулярной этой оси, интенсивность излучения была бы постоянной:  $J(z) = J_0 = \text{const}$ . Из-за поглощения плотность пучка будет убывать. Рассчитаем величину  $J(z)$  – количество нейтронов, за 1 с пересекающее 1 см<sup>2</sup> плоскости, имеющей горизонтальную координату  $z$ .



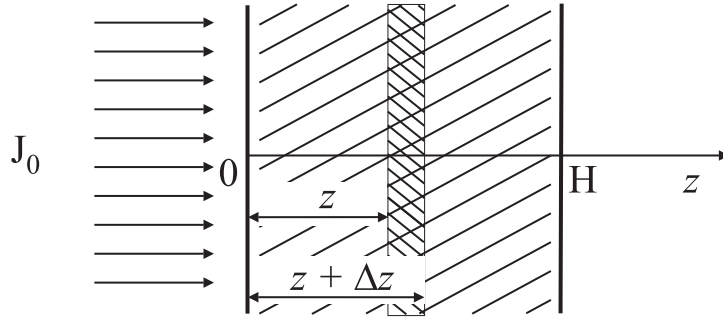


Рис. 1.9. Схема для расчета ослабления излучения в плоскопараллельном слое

Введем объемную плотность ядер  $N = (\rho \cdot N_0)/A$ ,  $[\text{см}^{-3}]$  – количество ядер в  $1 \text{ см}^3$  ( $\rho$  – плотность вещества (удельный вес),  $\text{г} \cdot \text{см}^3$ ;  $A$  – атомная (молекулярная) масса;  $N_0 = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число Авогадро). Рассмотрим слой вещества внутри слоя, заключенный между плоскостями  $z$  и  $z + \Delta z$ , где  $z$  и  $\Delta z$  – произвольны. Количество ядер в  $1 \text{ см}^2$  пластины толщиной  $\Delta z$  равно  $N \cdot \Delta z \cdot 1 \cdot 1$ . Мысленно устремим толщину выделенного слоя  $\Delta z$  к нулю:  $\Delta z \rightarrow 0$ ; при этом для одноатомного слоя величину  $N \cdot \Delta z$  можно рассматривать как поверхностную плотность ядер  $N_a$ . К выделенному слою применим формулу (1.18), где  $C = J(z) - J(z + \Delta z)$ , а  $J_0 = J(z)$ :

$$\begin{aligned} \sigma N_a = (1 - J_1/J_0) &\rightarrow \sigma N \cdot \Delta z = [J(z) - J(z + \Delta z)]/J(z) \rightarrow \\ &\rightarrow [J(z + \Delta z) - J(z)]/\Delta z + \sigma N \cdot J(z) = 0; \end{aligned} \quad (1.21)$$

при  $\Delta z \rightarrow 0$  из выражения (1.21) получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dJ}{dz} + \sigma N \cdot J(z) = 0, \quad (1.22)$$

общее решение которого имеет вид

$$J(z) = A \cdot \exp(-\sigma \cdot N \cdot z). \quad (1.23)$$

Константа  $A$  определяется из граничных условий  $J(z = 0) = J_0$ :

$$J(z) = J_0 \cdot \exp(-\sigma \cdot N \cdot z). \quad (1.24)$$

Выражение (1.24) является “фундаментальным” результатом – это закон ослабления плоского (т.е. узкого, нерасходящегося) пучка в однородной среде. Этот результат может подсказать идею экспериментального определения величины  $\sigma$ . Если в формулу (1.24) подставить

фиксированное значение  $z = H$ , то получим, что для экспериментального определения величины сечения  $\sigma$  необходимо измерить только одну экспериментальную величину – коэффициент ослабления пучка

$$k = \log(J_0/J_H). \quad (1.25)$$

Действительно, из (1.24) непосредственно следует

$$J(z = H) = J_H = J_0 \cdot \exp(-\sigma \cdot N \cdot z). \quad (1.26)$$

Тогда очевидно выражение для микроскопического сечения:

$$\sigma = \frac{1}{NH} \log\left(\frac{J_0}{J_H}\right) = \frac{k}{NH}. \quad (1.27)$$

Объемная плотность ядер  $N$  при этом полагается известной величиной. Далее мы чаще будем пользоваться макроскопическим сечением  $\Sigma = \sigma \cdot N$ , причем для всех реакций  $\Sigma_a, \Sigma_s$  и  $\Sigma_f$ :  $\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$ . Эта величина есть суммарная площадь сечений всех ядер в  $1 \text{ см}^3$  и имеет размерность  $[\Sigma] = [\sigma \cdot N] = \text{см}^2 \cdot \text{см}^{-3} = \text{см}^{-1}$ .

С учетом новых обозначений перепишем формулы (1.24) и (1.27) в следующем общепринятом виде:

$$J(z) = J_0 \cdot \exp(-\Sigma \cdot z), \quad (1.28)$$

$$\Sigma = \frac{1}{H} \log\left(\frac{J_0}{J_H}\right) = \frac{k}{H}. \quad (1.29)$$

Если теперь в (1.29) формально положить  $H = 1$ , то получим очень простое соотношение  $\Sigma = k$ . Отсюда следует еще одна физическая интерпретация макроскопического сечения:  $\Sigma$  – это коэффициент ослабления пучка на единице длины, или *линейный коэффициент ослабления*. Этот термин используется довольно часто и для него иногда применяют обозначение  $\mu$ . В курсе теории переноса излучения мы везде будем использовать только термин *макроскопическое сечение*  $\Sigma$ . Итак, подытожим новые термины:

$\Sigma_a = \sigma_a \cdot N$ – макроскопическое сечение поглощения; $\Sigma_s = \sigma_s \cdot N$ – макроскопическое сечение рассеяния; $\Sigma_f = \sigma_f \cdot N$ – макроскопическое сечение деления; $\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$ – полное макроскопическое сечение или линейный коэффициент ослабления пучка.
---

Снимем введенные выше ограничения “односортности” вещества: если вещество состоит из ядер нескольких типов, то полное макроскопическое сечение вещества формируется аддитивно:

$$\Sigma = N_1 \cdot \sigma_1 + N_2 \cdot \sigma_2 + \dots + N_M \cdot \sigma_M = \sum_{i=1}^M N_i \cdot \sigma_i, \quad (1.30)$$

где  $N_i$  – число ядер  $i$ -го сорта в  $1 \text{ см}^3$  вещества;  $\sigma_i$  – микроскопическое сечение некоторого типа для этого сорта ядер. Формула (1.24) для макросечения будет выглядеть так:

$$J(z) = J_0 \cdot \exp(-\Sigma \cdot z). \quad (1.31)$$

Если слой неоднороден, но сечение  $\Sigma$  зависит только от  $z$ , то уравнение (1.22) несколько усложняется:

$$\frac{dJ}{dz} + \Sigma(z) \cdot J(z) = 0. \quad (1.32)$$

В этом случае решение таково:

$$J(z) = J_0 \cdot \exp \left[ - \int_0^z \Sigma(\xi) d\xi \right]. \quad (1.33)$$

## 1.6. Средняя длина свободного пробега

Обратим внимание на размерность макросечения  $[\Sigma] = \text{см}^{-1}$ . Это не случайно, сечение действительно связано с другой важной макроскопической характеристикой излучения, имеющей размерность длины, – средней длиной свободного пробега.

Для вычисления этой характеристики вернемся к рис. 1.9 и мысленно устремим “правую” границу слоя в бесконечность:  $H \rightarrow \infty$ . Падающий на пластину нейтрон с некоторой вероятностью может поглотиться как вблизи координаты  $z = 0$ , так и в глубине слоя. Расстояние, пройденное нейтроном до поглощения, является случайной величиной непрерывного типа. Для ее расчета найдем прежде всего вероятность  $P(\Delta z)$  того, что нейтрон, упавший на грань  $z = 0$ , поглотится в слое  $\Delta z$  (см. рис. 1.9).

$$P(\Delta z) = \left( 1 - \frac{J_0 - J(z)}{J_0} \right) \cdot \frac{J(z) - J(z + \Delta z)}{J(z)} = \frac{J(z) - J(z + \Delta z)}{J_0}. \quad (1.34)$$

Первый множитель – выражение в круглых скобках – здесь означает вероятность для данного нейтрона пройти слой  $[0; z]$  без поглощения. Второй множитель означает вероятность того, что нейтрон, достигший координаты  $z$ , поглотится в слое  $\Delta z$ . С помощью формулы (1.31) легко определить явный вид  $P(\Delta z)$ :

$$P(\Delta z) = \frac{J(z) - J(z + \Delta z)}{J_0} = \exp(-\Sigma z) \cdot [1 - \exp(-\Sigma \cdot \Delta z)]. \quad (1.35)$$

Величина  $P$  аддитивна относительно  $\Delta z$ ; целесообразно вычислить ее производную – плотность вероятности поглотиться, которая является функцией точки и определяет вероятность поглотиться в единичном интервале около точки  $z$ :

$$f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{J(z) - J(z + \Delta z)}{J_0 \cdot \Delta z} = -\frac{J'(z)}{J_0} = \Sigma \cdot \exp(-\Sigma z). \quad (1.36)$$

Легко видеть, что на интервале  $z \in [0, \infty]$  плотность вероятности  $f(z)$  нормирована на единицу.

$$\int_0^{\infty} f(z) dz = \int_0^{\infty} \Sigma \cdot \exp(-\Sigma z) dz = 1. \quad (1.37)$$

Эта нормировка отражает простой физический факт, что в полубесконечной среде вероятность поглощения частицы равна единице, т.е. частица обязательно поглотится.

Следующий этап в вычислении средней глубины проникновения нейтрона в вещество – разбиение полупространства  $[0, +\infty]$  на элементарные слои  $(z_i, z_i + \Delta z_i)$ ; можно считать, что на рис. 1.9 представлен один из них (на рисунке этот слой не индексирован). Узлы разбиения расставлены произвольно, но интервалы  $\Delta z$  достаточно малы. Количество поглощений в элементарном слое  $(z_i, z_i + \Delta z_i)$ :

$$C(\Delta z_i) = J_0 \int_{z_i}^{z_i + \Delta z_i} f(z') dz' \approx J_0 \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta z_i, \quad z_i \leq \xi_i \leq z_i + \Delta z_i. \quad (1.38)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о среднем, т.е. в выражении (1.38) предполагается, что все нейтроны, поглощенные в слое  $\delta z_i$ , поглотились в точке  $\xi_i$ . Вычислим суммарный путь, пройденный нейтронами, поглощенными в рассматриваемом элементарном слое:

$$\xi_i \cdot C(\Delta z_i) = \xi_i \cdot J_0 \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta z_i. \quad (1.39)$$

Если просуммировать (1.39) по всем элементарным слоям, то определится путь, пройденный всеми  $J_0$  нейтронами до поглощения (ибо в бесконечном слое они поглотятся все):

$$\sum_i \xi_i \cdot C(\Delta z_i) = \sum_i \xi_i \cdot J_0 \cdot f(\xi) \cdot \Delta z_i = J_0 \cdot \sum_i f(\xi_i) \cdot \Delta z_i. \quad (1.40)$$

Устремив сумму (1.40) к пределу при стремлении максимума разбиения к нулю:  $\max_i \Delta z_i \rightarrow 0$ , перейдем к интегралу – точному значению суммарного пути всех нейтронов:

$$L = \lim_{\max_i \Delta z_i \rightarrow 0} \left[ J_0 \cdot \sum_i \xi_i \cdot f(\xi_i) \cdot \Delta z_i \right] = J_0 \int_0^{\infty} \xi \cdot f(\xi) d\xi. \quad (1.41)$$

Отсюда средний путь, т.е. путь, приходящийся на один нейтрон, равен среднему арифметическому

$$l = \frac{L}{J_0} = \int_0^{\infty} \xi \cdot f(\xi) d\xi. \quad (1.42)$$

Величина  $l$  называется средней длиной свободного пробега нейтрона (относительно поглощения). На языке теории вероятностей это есть математическое ожидание непрерывной величины  $z$ , т.е. расстояния, пройденного нейтроном до поглощения.

Воспользовавшись явным выражением (1.36) для функции  $f(z)$ , вычислим величину  $l$ , взяв интеграл по частям:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\infty} \xi \cdot \Sigma \cdot \exp(-\Sigma \xi) d\xi \equiv - \int_0^{\infty} \xi d[\exp(-\Sigma \xi)] = -\xi \cdot \exp(-\Sigma \xi) \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \int_0^{\infty} \exp(-\Sigma \xi) d\xi = (0 - 0) - \frac{1}{\Sigma} \cdot \exp(-\Sigma \xi) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\Sigma}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Размерность  $[l] = [\Sigma]^{-1} = \text{см}$ , т.е. величина, обратная макросечению, имеет прозрачный физический смысл: она равна средней длине свободного пробега (слово “средний” обычно опускается). Итак, резюмируем:

$l_a = 1/\Sigma_a$ – длина свободного пробега относительно поглощения; $l_s = 1/\Sigma_s$ – длина свободного пробега относительно рассеяния; $l_f = 1/\Sigma_f$ – длина свободного пробега относительно деления; $l = 1/\Sigma$ – длина свободного пробега $1/l = 1/l_a + 1/l_s$ .
---

## 1.7. Плотность столкновений

Рассмотрим некоторый объем, заполненный хаотически движущимися нейтронами; элементарная ячейка этого объема изображена на рис. 1.10. Введем нижеследующие ограничения.

1. Скорости нейтронов одинаковы по абсолютной величине:  $v = \text{const}$ .
2. В среде допускается только поглощение.
3. В выделенном объеме среды  $\Delta V$  отсутствуют какие бы то ни было источники нейтронов (например, источники “работали” до какого-то момента  $t_0$ , а потом “выключились”, наше же рассмотрение началось с момента  $t_0$ ).
4. Стенки объема  $\Delta V$  непроницаемы для нейтронов, т.е. можно считать, что нейтроны, падая на поверхность элементарного объема изнутри или извне, отражаются как упругие шарики.

Напомним, что если нам известна плотность нейтронов в среде в момент времени  $t$ , а именно  $n(x, y, z, t)$ , то по формуле (1.5) можно вычислить количество нейтронов  $F$  в объеме  $\Delta V$  в момент времени  $t$ :

$$F(\Delta V, t) \approx n(x, y, z, t) \cdot \Delta V. \quad (1.44)$$

Подсчитаем, какое количество нейтронов  $C(\Delta V, \Delta t)$  поглотится в объеме  $\Delta V$  за промежуток времени  $\Delta t$ . Мысленно развернем все хаотически

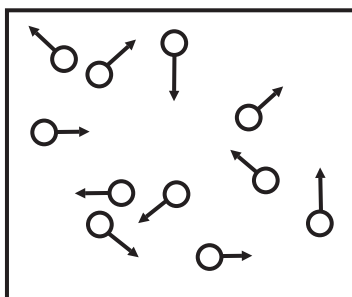


Рис. 1.10. Иллюстрация хаотического движения нейтронов в элементарном объеме материальной среды  $\Delta V$

движущиеся в объеме  $\Delta V$  нейтроны в одном направлении и бросим их на поверхность полубесконечной среды того же материального состава. Нейтроны падают нормально к поверхности, они распределены равномерно на площади  $1 \text{ см}^2$ . Несложно убедиться, что нейтроны мысленного эксперимента и нейтроны в объеме  $\Delta V$  находятся в одинаковых условиях: скорости их одинаковы, рассеяние же на стенках объема  $\Delta V$ , по условию, не изменяет состояния нейтрона. Напомним, что мы рассматриваем линейную модель переноса, в рамках которой

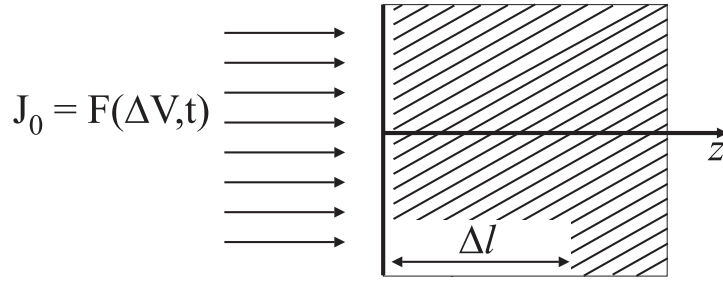


Рис. 1.11. Пояснение к мысленному эксперименту

взаимодействие “нейтрон-нейтрон” отсутствует. Из сказанного следует, что количество поглощений нейтронов в мысленном эксперименте для призмы с основанием  $1 \text{ см}^2$  за промежуток времени  $\Delta t$  должно быть равно интересующей нас величине  $C(\Delta V, \Delta t)$ . Это количество нетрудно подсчитать. Высота призмы  $\Delta l = v \cdot \Delta t$  (рис. 1.11); пусть  $\Delta t \rightarrow 0$ , соответственно  $\Delta l$  устремится к нулю. Ограничимся прохождением одноатомного слоя, как в задаче о расчете сечения; тогда количество ядер в одноатомной пластинке площадью  $1 \text{ см}^2$ , по определению, равно  $N_a \equiv N \cdot \Delta V \equiv N \cdot \Delta S \cdot \Delta l = N \cdot \Delta l = N \cdot v \cdot \Delta t$ . Воспользуемся полученной ранее формулой (1.18) и проделаем очевидные выкладки:

$$C = J_0 \cdot \sigma_a \cdot N_a = \underbrace{[F(\Delta V, t)]}_{=J_0} \cdot \sigma_a \cdot \underbrace{[N \cdot \Delta l]}_{=N_a} = (n \cdot \Delta V) \cdot \sigma_a \cdot (N \cdot v \cdot \Delta t) = nv \cdot \Sigma_a \cdot \Delta V \Delta t. \quad (1.45)$$

Снимем ограничение на наличие источников в объеме  $\Delta V$ . Допустим, что в объеме  $\Delta V$  действуют источники нейтронов плотностью  $q(x, y, z, t)$ . За промежуток времени  $\Delta t$  эти источники добавят в объем  $\Delta V$  следующее количество нейтронов:

$$Q_v = \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta V} q(x, y, z, t) dV \approx q(x, y, z, t) \Delta V \Delta t. \quad (1.46)$$

Эта добавка пропорциональна произведению  $\Delta V \Delta t$ ; “основное” количество (1.44), пропорциональное  $\Delta V$ , “пропущенное” через процесс поглощения (1.45), получило множитель  $\Delta t$ . Этот же множитель получит и добавка, обусловленная источниками, при расчете поглощений. В результате добавка в количество поглощений, определяемая нейтронами источника, будет такова:  $\Delta C_q \sim (\Delta V \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = \Delta V \cdot (\Delta t)^2$ , т.е. будет иметь более высокий порядок малости. Запишем ее так:  $\Delta C_q = A \cdot \Delta V \cdot (\Delta t)^2$ . Обратимся к ограничению по проницаемости стенок. Если нейтронам “позволить” пересекать поверхность выделенного объема  $\Delta V$  во всех направлениях, это приведет к добавкам в  $\Delta V$ ,

пропорциональным величине поверхности  $\Delta S$  и величине  $\Delta t$ . Для оценки добавки расположим внутри рассматриваемого объема элементарную площадку  $\Delta S$ , задаваемую нормалью  $\vec{n}$  (рис. 1.12). Нейтроны в среде движутся хаотически, часть из них пересекает площадку  $\Delta S$  в

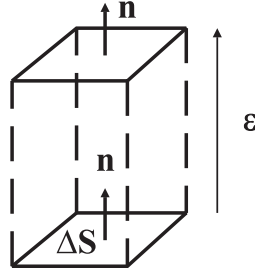


Рис. 1.12. Иллюстрация к вычислению результирующего перетекания нейтронов

сторону нормали, часть – в противоположном направлении. Разность этих “перетеканий” представляет собой результирующее перетекание в сторону нормали; эта разность может быть как положительной, так и отрицательной. Результирующее перетекание через площадку  $\Delta S$  за промежуток времени  $\Delta t$  в направлении нормали пропорционально произведению  $\Delta S \cdot \Delta t$ :  $j_{\vec{n}}(\vec{r}) \cdot \Delta S \cdot \Delta t$ , где  $j_{\vec{n}}(\vec{r})$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от координаты  $\vec{r}$  и от ориентации площадки  $\Delta S$ . Переместим площадку вдоль вектора  $\vec{n}$  параллельно самой себе на малое расстояние  $\epsilon$ . Результирующее перетекание в новом положении площадки равно  $j_{\vec{n}}(\vec{r} + \epsilon \vec{n}) \cdot \Delta S \cdot \Delta t$ .

Будем считать, что объем  $\Delta V$  имеет форму параллелепипеда – это не нарушает общности рассуждений. Выберем две противоположные грани параллелепипеда. Можно считать, что одна из двух граней получается смещением другой грани параллельно самой себе (см. рис. 1.12). Добавка  $Q_s$  в объем  $\Delta V$  за счет выбранных двух граней равна, естественно, разности перетеканий:

$$Q_s = [j_{\vec{n}}(\vec{r}) - j_{\vec{n}}(\vec{r} + \epsilon \vec{n})] \cdot \Delta S \cdot \Delta t. \quad (1.47)$$

Если функция  $j$  достаточно гладкая, а  $\epsilon$  мало, выразим разность в (1.47) через производную:

$$Q_s = \frac{[j_{\vec{n}}(\vec{r}) - j_{\vec{n}}(\vec{r} + \epsilon \vec{n})]}{\epsilon} \cdot \epsilon \cdot \Delta S \Delta t \approx - \left. \frac{\partial j_{\vec{n}}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \cdot \epsilon \cdot \Delta S \cdot \Delta t = - \left. \frac{\partial j_{\vec{n}}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \cdot \Delta V \cdot \Delta t, \quad (1.48)$$

где  $\Delta V = \epsilon \cdot \Delta S$  – объем параллелепипеда, равный, по условию, исходному элементарному объему  $\Delta V$  (см. рис. 1.12). Для других двух пар противоположных граней рассуждения могут быть повторены, вклад



через них также пропорционален произведению  $\Delta V \cdot \Delta t$ . Вспомнив, что получено выше для добавки в количество поглощений, определяемой нейтронами источника, запишем добавку за счет проницаемости стенок объема  $\Delta V$ :  $\Delta C_s \sim (\Delta \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$ , или  $\Delta C_s = B \cdot \Delta V \cdot (\Delta t)^2$ .

Итак, при снятии ограничений 3 и 4 количество поглощений  $C$  получает добавки  $\Delta C_q$  и  $\Delta C_s$  соответственно. Соберем компоненты:

$$C_t = C + \Delta C_q + \Delta C_s = nv \cdot \Sigma_a \cdot \Delta V \Delta t + A \cdot \Delta V \cdot (\Delta t)^2 + B \cdot \Delta V \cdot (\Delta t)^2. \quad (1.49)$$

Напомним, что величины  $A$  и  $B$  не зависят от  $\Delta V$  и  $\Delta t$ . Как видно из выражения (1.49),  $C_t$  является аддитивной функцией переменной области  $G$  в четырехмерном пространстве  $(x, y, z, t)$ . Мерой области  $G$  служит произведение  $\Delta V \cdot \Delta t$ . Найдем производную функции  $C_t(\Delta V, \Delta t)$  по области  $G$ :

$$\begin{aligned} \frac{dC_t}{dG} &= \lim_{|G| \rightarrow 0} \frac{C_t(\Delta V, \Delta t)}{\Delta V \cdot \Delta t} = \lim_{|G| \rightarrow 0} \frac{C + \Delta C_q + \Delta C_s}{\Delta V \cdot \Delta t} = \\ &= \lim_{|G| \rightarrow 0} \frac{nv \cdot \Sigma_a \cdot \Delta V \Delta t + A \cdot \Delta V \cdot (\Delta t)^2 + B \cdot \Delta V \cdot (\Delta t)^2}{\Delta V \cdot \Delta t} = n \cdot v \cdot \Sigma_a. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Величина  $n \cdot v \cdot \Sigma_a$  называется плотностью поглощающих столкновений. Из выражения (1.50) видно, что вклады в плотность поглощений, определяемые нейтронами внутренних источников и нейтронами, пересекающими поверхности выделенного объема, равны нулю, поскольку вклады  $\Delta C_q$  и  $\Delta C_s$  имеют более высокий порядок малости (квадратичный по  $t$ ).

Произведение  $n \cdot v$  обозначается традиционно  $\phi \equiv n \cdot v$  и называется плотностью потока нейтронов. Уравнения переноса обычно пишут именно для функции плотности потока  $\phi$ .

Количество поглощений в некотором объеме  $V$  за конечный промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  определится интегралом

$$C(V, t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \phi(\vec{r}, t) \cdot \Sigma_a dV. \quad (1.51)$$

Аналогично плотности поглощающих столкновений могут быть введены плотности рассеивающих столкновений и делений. Плотность столкновений  $\phi \cdot \Sigma$  как сумма плотностей рассеяний и поглощений также является важной характеристикой:

$$\phi \cdot \Sigma = \phi \cdot \Sigma_a + \phi \cdot \Sigma_s. \quad (1.52)$$

Резюмируем основные результаты данного параграфа:

$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}, t) &\equiv n(\vec{r}, t) \cdot v - \text{плотность потока частиц}; \\ \varphi(\vec{r}, t) \cdot \Sigma_a &- \text{плотность поглощающих столкновений}; \\ \varphi(\vec{r}, t) \cdot \Sigma_s &- \text{плотность рассеивающих столкновений}; \\ \varphi(\vec{r}, t) \cdot \Sigma_f &- \text{плотность делящих столкновений}; \\ \varphi(\vec{r}, t) \cdot \Sigma &= \varphi \cdot \Sigma_a + \varphi \cdot \Sigma_s - \text{полная плотность столкновений}.\end{aligned}$
---

В заключение отметим, что исчерпывающее знание поля излучения означает, что функция  $n(\vec{X})$  – или, что то же самое, функция  $\varphi(\vec{X})$  – задана при всех значениях  $\vec{X}$ , где  $\vec{X}$  – совокупность переменных задачи, например  $\vec{X} = \{x, y, z, t\}$ . Знание плотности нейтронов во всех точках области является исчерпывающим для многих задач переноса – с помощью плотности могут быть вычислены большинство интересных нас величин. В этой связи определение поля плотности частиц может считаться основной задачей в теории переноса.

## ГЛАВА 2

# ОДНОСКОРОСТНОЕ ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

### 2.1. Оператор Лапласа

Уравнение диффузии нейтронов, которым мы будем заниматься в данном разделе, – дифференциальное уравнение второго порядка по пространственным переменным. Напомним в связи с этим запись дифференциального оператора Лапласа, определяющего двукратное дифференцирование, в некоторых важных системах координат. Оператор Лапласа, или лапласиан  $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$ , имеет следующий вид:

<i>декартова прямоугольная система координат (x, y, z)</i>	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
<i>цилиндрическая система координат (ρ, ψ, z)</i>	$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
<i>сферическая система координат (r, θ, ψ)</i>	$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$

### 2.2. Плотность диффузионного тока нейтронов

Траекторию хаотического движения нейтронов в среде можно представлять в виде ломаной линии, в вершинах которой происходят “мгновенные” события – рассеяние или поглощение. Ломаная линия может закончиться внутри рассматриваемого объема (поглощение) или же выйти через поверхность этого объема (см. рис. 1.3). Диффузионное уравнение, которое будет получено далее, описывает поведение очень большого количества нейтронов. Индивидуальные траектории как бы “усредняются” при выводе уравнения.

Уравнение диффузии, как и большинство уравнений математической физики, является уравнением баланса (сохранения) нейтронов. Общая схема составления уравнения для какого-либо объема  $V$  схематически изображена на рис. 2.1. Буквы  $q$  и  $\Sigma_a$  внутри объема  $V$  услов-

но обозначают работу источников и процесс поглощения; стрелки, направленные наружу, – выход нейтронов из рассматриваемого объема. Ниже объема  $V$  на рис. 2.1 изображено соотношение баланса для процессов в объеме. Отметим, что знак у “выхода” может быть и положительным; тогда это “вход” частиц в объем  $V$ , и направление стрелок должно измениться. Работу источников и количество погло-

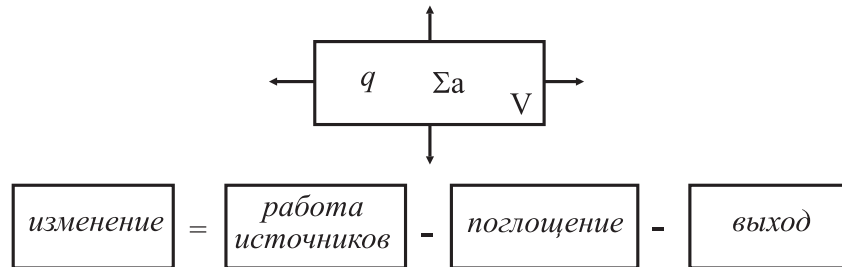


Рис. 2.1. Пояснение к выводу уравнения баланса

щений подсчитать несложно. Для расчета выхода нейтронов из объема  $V$  необходимо ввести еще одну характеристику поля излучения – плотность тока, которая позволит определить перетекание частиц через поверхность (см. п.1.7).

Для расчета плотности тока нейтронов рассмотрим материальную среду, в которой движутся нейтроны. Поле  $n(\vec{r}, t)$  задано. Введем нижеследующие ограничения.

1. Среда бесконечна и однородна.
2. В среде нет источников.
3. Рассеяние изотропно в лабораторной системе координат.
4. Среда преимущественно рассеивающая, т.е.  $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ,  $\Sigma_a \approx \sigma$ .
5. Среднее время между двумя актами рассеяния много меньше времени  $T$ , за которое существенно (например, в  $e \approx 2.71$  раз) изменяется функция  $n(\vec{r}, t)$ , т.е.  $\tau = l_s/v \leq T$ .

Плотность тока частиц может быть вычислена посредством подсчета количества нейтронов  $N_-$ , которые за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  пересекут площадку  $\Delta S$ , перетекая из верхнего ( $z > 0$ ) полупространства в нижнее ( $z < 0$ ) полупространство (рис. 2.2). Площадка  $\Delta S$  расположена в плоскости  $(x, y)$  нормально к оси  $z$ . Результирующая плотность тока в направлении  $(-z)$  при этом будет определяться соотношением

$$j_-(\vec{r} = 0, t) = \frac{dN_-}{d(\Delta S \Delta t)} = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{N_-}{|\Delta S \cdot \Delta t|}. \quad (2.1)$$

Функция  $N_-(\Delta S \Delta t)$  является функцией области, тогда верхнее полупространство можно разбить на элементарные объемы  $V_i$  и представить

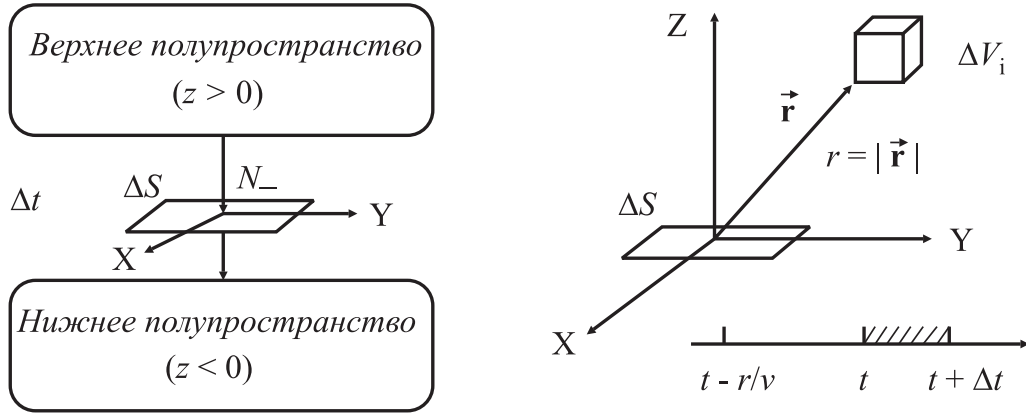


Рис. 2.2. Пояснение к расчету плотности тока нейтронов

результатирующий ток  $N_-$  как сумму

$$N_-(\Delta S, \Delta t) = \sum_i \Delta N_i(\Delta S, \Delta t), \quad (2.2)$$

где  $\Delta N_i$  – вклад элементарного объема  $V_i$  в результирующий ток  $N_-$  через площадку  $\Delta S$ . Однако не все частицы, находящиеся в объеме  $\Delta V_i$ , дадут вклад в  $\Delta N_i$ . Вероятность такого “удачного” события  $p$  определяется тремя независимыми событиями:

- а) в результате столкновения произойдет рассеяние, а не поглощение нейтрона (пусть вероятность этого события равна  $p_1$ );
- б) направление движения рассеявшегося нейтрона будет ориентировано на площадку  $\Delta S$  (вероятность этого события обозначим  $p_2$ );
- в) ориентированный нейтрон не будет выведен из “пучка” при движении к площадке (вероятность этого события обозначим  $p_3$ ).

Очевидно, вероятность реализации “удачного” столкновения равна произведению вероятностей трех независимых событий:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \quad (2.3)$$

При заданном поле  $n(\vec{r}, t)$  количество частиц в элементарном объеме  $V_i$  любой момент времени  $t'$  будет

$$F(\Delta V_i, t') \simeq n(\vec{r}, t') \cdot \Delta V_i. \quad (2.4)$$

Для того чтобы нейтрон “попал” во временное “окно” регистрации от  $t$  до  $t + \Delta t$ , он должен претерпеть рассеяние заранее, в промежутке времени от  $t'$  до  $t' + \Delta t$ , причем  $t' = t - \tau$ . Здесь опережение  $\tau = r/v$  – время, необходимое нейтрону, движущемуся со скоростью  $v$ , для прохождения расстояния  $r$  от объема  $\Delta V_i$  до площадки  $\Delta S$  (взаимодействие

предполагается мгновенным). Тогда можно определить вероятность  $p$  из отношения

$$p = \frac{\Delta N_i(\Delta S, \Delta t)}{F(\Delta V_i, t')}. \quad (2.5)$$

Если количество частиц, рассеянных в объеме  $V_i$  за время от  $t'$  до  $t' + \Delta t$  обозначить через  $C_i(\Delta V_i, \Delta t)$ , то по определению

$$p_1 = \frac{C_i(\Delta V_i, \Delta t)}{F(\Delta V_i, t')}. \quad (2.6)$$

Подставляя эти соотношения в (2.3) и сократив знаменатели в левой и правой частях, получим

$$\Delta N_i(\Delta S, \Delta t) = C_i(\Delta V_i, \Delta t) \cdot p_2 \cdot p_3. \quad (2.7)$$

Количество рассеяний в объеме  $\Delta V_i$  за промежуток времени  $\Delta t$  получается интегрированием плотности рассеяний:

$$C_i = \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta V_i} \Sigma_s \cdot \varphi(\vec{r}, t - r/v) dV \approx \Sigma_s \cdot \varphi(\vec{r}, t - r/v) \cdot \Delta V_i \cdot \Delta t. \quad (2.8)$$

Здесь, в силу малости промежутков  $\Delta V_i$  и  $\Delta t$ , дважды применена теорема о среднем.

Рассеяние, по условию 3, изотропно. Это означает, что в единичный телесный угол вылетает после рассеяния одинаковое количество нейтронов, а именно  $1/4\pi$  нейтронов. Рассмотрим точечный изотропный источник мощностью  $q$  нейтрон/с, окруженный сферой радиуса  $r$  (рис. 2.3). Пусть источник расположен в вакууме, т.е. взаимодействие со средой отсутствует. Вычислим количество нейтронов, пересекающих в 1 с площадку размером  $1 \text{ см}^2$  на поверхности сферы. Пусть эта величина равна  $j$ . Если ее умножить на площадь поверхности сферы  $4\pi r^2$ , найдем число нейтронов, пересекающих в 1 с поверхность всей сферы. Нейтроны не взаимодействуют внутри сферы, поэтому мощность источника равна мощности выхода нейтронов с поверхности сферы:

$$j \cdot 4\pi r^2 = q, \quad \text{отсюда} \quad j = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (2.9)$$

Вернувшись к задаче ориентации нейтрона в сторону площадки  $\Delta S$ , найдем вероятность для нейтрона вылететь в направлении площадки:

$$p_2 = \frac{\Delta S \cdot \cos \theta}{4\pi r^2}. \quad (2.10)$$

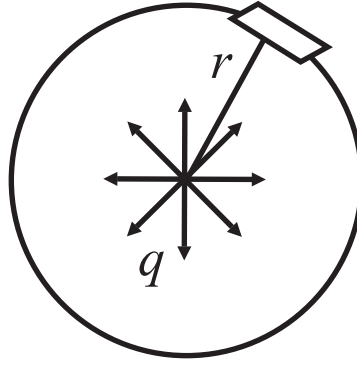


Рис. 2.3. Точечный изотропный источник в вакууме, окруженный сферой  $r$

Множитель  $1/4\pi$  объяснен выше (см. (2.9)). Множитель  $\Delta S \cdot \cos \theta$  представляет собой “видимый размер” площадки  $\Delta S$  из точки  $\vec{r}$ , который, очевидно, зависит не только от величины площадки  $\Delta S$ , но и от ее ориентации относительно точки  $\vec{r}$ .

Осталось “довести” нейтроны (2.10) до площадки  $\Delta S$ . На пути от точки  $\vec{r}$  до площадки нейтроны будут претерпевать и рассеяния, и поглощения. Некоторые рассеяния незначительно отклонят нейтроны от первоначального направления, и они пересекут площадку  $\Delta S$ . Надо ли их учитывать? Да, и они будут учтены посредством интегрирования по объему, когда будут суммироваться вклады всех рассеивающих точек. Поэтому следует считать, что каждое столкновение выводит нейтроны из пучка (2.10). Вспомнив закон ослабления пучка (1.30), запишем

$$p_3 = \frac{j(r)}{J_0} = \exp(-\Sigma \cdot r). \quad (2.11)$$

Собирая все вместе и подставляя в (2.7), получим

$$\Delta N_i(\Delta S, \Delta t) = \frac{\Delta S \cdot \cos \theta}{4\pi r^2} \cdot \Sigma_s \cdot \phi(\vec{r}, t - r/v) \cdot \exp[-(\Sigma_a + \Sigma_s) \cdot r] \Delta V_i \Delta t. \quad (2.12)$$

Остается просуммировать вклад объема  $\Delta V_i$  (2.12) по всем объемам  $\Delta V_i$  верхнего полупространства. Уменьшая объемы разбиения полупространства:  $\max_i(\Delta V_i) \rightarrow 0$ , переходим к интегралу:

$$\int_{\substack{V \\ z>0}} \Delta N dV \equiv \frac{\Sigma_s \Delta S \Delta t}{4\pi} \int_{\substack{V \\ z>0}} \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot \exp[-(\Sigma_s + \Sigma_a) \cdot r] \cdot \phi(\vec{r}, t - r/v) dV. \quad (2.13)$$

Как следует из выражения (2.13), количество нейтронов, пересекающих площадку за промежуток времени  $\Delta t$ , – величина аддитивная. Ее

производная  $j_-$  называется плотностью тока нейтронов, пересекающих единичную площадку в плоскости  $(x, y)$  за единичный промежуток времени в направлении  $(-z)$ . Интеграл (2.13) запишем в сферической системе координат, где  $\Delta V = r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta d\psi$ :

$$j_- \equiv \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left\{ \frac{1}{\Delta S \Delta t} \int_V C_{SGP} dV \right\} = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} \left[ \varphi(\vec{r}, t - r/v) \times \right. \\ \left. \times \exp [-(\Sigma_s + \Sigma_a) \cdot r] \cos \theta \sin \theta \right] d\theta. \quad (2.14)$$

Подынтегральное выражение в (2.14) содержит быстро убывающую функцию  $\exp(-\cdot)$ : при расстояниях  $r > 3 \cdot l$ , где  $l = 1/(\Sigma_s + \Sigma_a)$  – длина свободного пробега, экспонента убывает более чем в 20 раз. Из этого следует, что основной вклад в интеграл дают рассеяния вблизи площадки. Разложим функцию  $\varphi$  в ряд Тейлора вблизи начала координат и сформулируем еще одно ограничение диффузионной теории. Предположим,

*что на расстояниях до трех длин свободного пробега функция плотности потока нейтронов  $\varphi(\vec{r}, t)$  хорошо описывается членами нулевого и первого порядка разложения в ряд Тейлора.*

По условию 5 на данных расстояниях плотность потока меняется незначительно и можно приближенно считать  $\varphi(\vec{r}, t - r/v) \approx \varphi(\vec{r}, t)$ . Запишем цепочку упрощений:

$$\varphi(\vec{r}, t - r/v) \approx \varphi(\vec{r}, t) \approx \varphi_0 + x \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_0 + y \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_0 + z \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0. \quad (2.15)$$

Здесь индекс “0” означает, что соответствующая величина берется в начале координат. Наконец, вспомним ограничение 4 и заменим в показателе экспоненты:  $\Sigma_s + \Sigma_a \approx \Sigma_s$ .

Для вычисления интеграла (2.14) подставим разложение (2.15) в выражение (2.14) и рассмотрим каждый член получившейся суммы:

$$\frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} \left( \varphi_0 + x \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_0 + y \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_0 + z \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \right) \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta = \\ = A + B + C + D. \quad (2.16)$$



1. Вычисления начнем с интеграла  $A$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} \varphi_0 \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta &= \frac{\Sigma_s \varphi_0}{4\pi} 2\pi \int_0^\infty e^{-\Sigma_s \cdot r} dr \int_{\pi/2}^0 \cos \theta d(\cos \theta) = \\ &= -\frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{\pi/2}^0 \cdot \frac{\Sigma_s \varphi_0}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\Sigma_s} d(e^{-\Sigma_s r}) = -\frac{\varphi_0}{4} e^{-\Sigma_s r} \Big|_0^\infty = \frac{\varphi_0}{4}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2. Обратимся к вычислению интеграла  $B$ , вспомнив связь (1.15)  
 $x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} x \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_0 \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta &= \\ &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_0 \cdot \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty r \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi = \\ &= \underbrace{\sin \psi \Big|_0^{2\pi}}_{=0} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_0 \cdot \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty r \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

3. Интеграл  $C$  равен нулю, поскольку он представляет собой интеграл от периодической по  $\psi$  функции на интервале периода  $2\pi$ .

4. Остается вычислить интеграл  $D$ , заменив  $z = r \cdot \cos \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} z \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta &= \\ &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 2\pi \int_0^\infty r \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} dr \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \\ &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \cdot \frac{\Sigma_s}{2} \cdot \int_0^\infty r \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} dr \int_{\pi/2}^0 \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_{\pi/2}^0 \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \cdot \frac{\Sigma_s}{2} \cdot \int_0^\infty r \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} dr = \\
 &= -\frac{\Sigma_s}{6} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \cdot \int_0^\infty \frac{r}{\Sigma_s} d(e^{-\Sigma_s \cdot r}) = -\frac{1}{6} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \cdot \underbrace{\left[ r \cdot e^{-\Sigma_s \cdot r} \right]_0^\infty}_{=0} + \\
 &+ \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \cdot \int_0^\infty e^{-\Sigma_s \cdot r} dr = \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\Sigma_s} d(e^{-\Sigma_s \cdot r}) = \frac{1}{6\Sigma_s} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

При вычислениях применена формула интегрирования по частям. Запишем окончательное выражение для диффузионной плотности тока, направленного против оси  $z$ :

$$j_- = \frac{\varphi_0}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0. \quad (2.20)$$

Отличия вычислений плотности тока в положительном направлении оси  $z$  состоят в изменении пределов интегрирования по углу  $\theta$ : в этом случае интегрируется от  $\pi/2$  до  $\pi$  и диффузионная плотность тока  $j_+$  отличается только знаком:

$$j_+ = \frac{\varphi_0}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0. \quad (2.21)$$

Результирующая плотность тока в положительном направлении оси  $z$  равна разности между  $j_+$  и  $j_-$ :

$$j_{+z} = j_+ - j_- = -\frac{1}{3\Sigma_s} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0 = -D \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_0, \quad (2.22)$$

где  $D = (3\Sigma_s)^{-1}$  – обычное обозначение коэффициента диффузии.

При получении формул для плотности тока были введены ограничения, которые могут быть в значительной степени сняты. Это будет сделано ниже, после вывода диффузионного уравнения.

Обобщим полученный результат. Если площадка  $\Delta S$  ориентирована произвольно (рис. 2.4), то можно убедиться, что плотности тока нейтронов в направлении нормали и в противоположном направлении таковы:

$$\begin{cases} j_+ = \frac{\varphi_M}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_M, \\ j_- = \frac{\varphi_M}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_M. \end{cases} \quad (2.23)$$

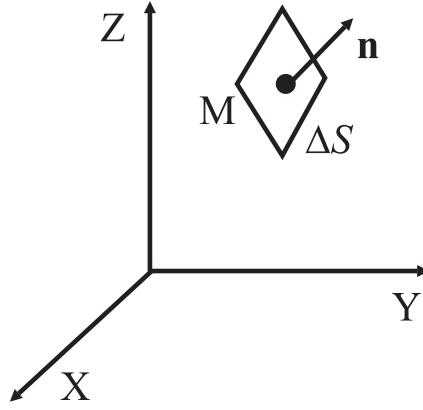


Рис. 2.4. Произвольная ориентация элементарной площадки  $\Delta S$

Здесь  $\partial\phi/\partial\vec{n}$  – производная по нормали: индекс  $M$  означает, что соответствующая величина берется в точке  $M \in \Delta S$ . Результирующая плотность тока в точке  $M$  в направлении  $\vec{n}$

$$j_{\vec{n}} = j_+ - j_- = -\frac{1}{3\Sigma_s} \cdot \left[ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} \right]_M = -D \cdot \left[ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} \right]_M. \quad (2.24)$$

Из формулы (2.24) следует, в частности, что результирующее перетекание нейтронов происходит из области с большей плотностью в область с меньшей плотностью: если  $j_{\vec{n}} > 0$ , то с необходимостью  $\partial\phi/\partial\vec{n} < 0$ , т.е. ток положителен в сторону убывания функции  $\phi$ , а значит, и функции плотности нейтронов  $n(\cdot)$  ( $\phi \equiv n(\cdot) \cdot v$ )

Воспользовавшись известной формулой  $\partial\phi/\partial\vec{n} = \vec{n} \cdot \nabla\phi$ , перепишем выражение (2.24) в виде

$$j_{\vec{n}} = -D \cdot \left[ \frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} \right]_M = -D \cdot \vec{n} \cdot \nabla\phi. \quad (2.25)$$

Величина  $(-D \cdot \vec{n} \cdot \nabla\phi)$  называется векторным током нейтронов  $\vec{j}$ :

$$\vec{j} = -D \cdot \vec{n} \cdot \nabla\phi \equiv -D \cdot \text{grad}\phi, \quad (2.26)$$

и результирующая плотность тока (2.25) может быть записана как скалярное произведение:

$$j_{\vec{n}} = (\vec{j} \cdot \vec{n}). \quad (2.27)$$

Отметим, что все выражения для плотности диффузионного тока (2.22)–(2.27) с точки зрения математики представляют собой первый закон Фика (Адольф Фик, 1855).

### 2.3. Вывод диффузионного уравнения

Обратимся к рис. 2.1 и получим компоненты балансного соотношения для конечного объема  $V$  за малый промежуток времени  $\Delta t$ . При заданном поле  $n(\vec{r}, t)$  количества нейтронов в объеме  $V$  в момент времени  $t$  и в момент времени  $t + \Delta t$  соответственно равны

$$N_v(t) = \int_V n(\vec{r}, t) dV; \quad N_v(t + \Delta t) = \int_V n(\vec{r}, t + \Delta t) dV. \quad (2.28)$$

Следовательно, приращение количества нейтронов в объеме  $V$  за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\Delta N_v(\Delta t) = \int_V [n(\vec{r}, t + \Delta t) - n(\vec{r}, t)] dV. \quad (2.29)$$

Изменение количества нейтронов (2.29) обусловлено: а) источниками; б) поглощением и в) диффузионным перетеканием через поверхности объема  $V$ . Вычислим последовательно эти компоненты уравнения баланса:

а) если плотность распределения источников  $q(\vec{r}, t)$ , то соответствующий вклад источников  $\Delta N_q$  за промежуток времени  $\Delta t$

$$\Delta N_q = \Delta t \cdot \int_V q(\vec{r}, t) dV; \quad (2.30)$$

б) количество поглощений в объеме  $V$  за промежуток времени  $\Delta t$   $N_a$  вычисляется интегрированием плотности поглощающих столкновений:

$$\Delta N_a = \Delta t \cdot \int_V \Sigma_a \cdot \phi(\vec{r}, t) dV; \quad (2.31)$$

в) для вычисления перетекания нейтронов через поверхность  $S$  объема  $V$  (рис. 2.5) разобьем поверхность  $S$  на элементарные площадки  $\Delta S_i$ . Через каждую площадку  $\Delta S_i$  за промежуток времени  $\Delta t$  в направлении нормали выходит, в соответствии с выражением (2.25),  $\Delta t \cdot (-D \cdot \vec{n} \cdot \nabla \phi) \cdot \Delta S_i$  нейтронов. Для определения количества нейтронов  $\Delta N_{\text{sur}}$ , выходящих через всю поверхность объема  $V$  за время  $\Delta t$ , необходимо просуммировать вклады всех площадок. Устремив, далее, максимум разбиения  $\Delta S_i$  к нулю, приходим к интегралу по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ :

$$\Delta N_{\text{sur}} = \Delta t \cdot \oint_S (-D \cdot \vec{n} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, t)) dS. \quad (2.32)$$

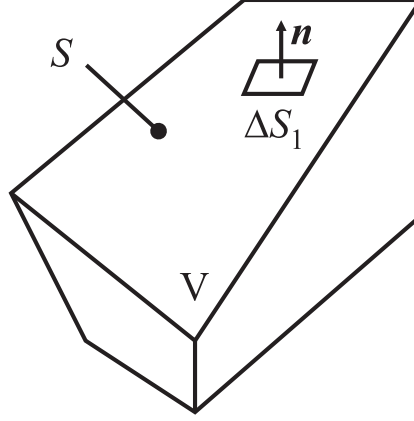


Рис. 2.5. Элементарная ориентированная площадка  $\Delta S_i$  на поверхности  $S$  объема  $V$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса и переведем поверхностный интеграл в объемный, так как величины всех остальных вкладов  $\Delta N_{v,q,a}$  – объемные интегралы:

$$\Delta N_{\text{sur}} = \Delta t \oint_S (-D \cdot \vec{n} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, t)) dS = \Delta t \int_V \nabla \cdot (-D \cdot \vec{n} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, t)) dV. \quad (2.33)$$

Запишем, наконец, соотношение баланса (см. рис. 2.1):

$$\begin{aligned} \Delta N_v &= \Delta N_q - \Delta N_a - \Delta N_{\text{sur}} \rightarrow \int_V [n(\vec{r}, t + \Delta t) - n(\vec{r}, t)] dV = \\ &= \Delta t \cdot \int_V [q(\vec{r}, t) - \Sigma_a \cdot \phi(\vec{r}, t) + \nabla D \nabla \phi(\vec{r}, t)] dV. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Поделим обе части (2.34) на  $\Delta t$  и, устремив  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\int_V \left[ \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} - q(\vec{r}, t) + \Sigma_a \cdot \phi(\vec{r}, t) - \nabla D \nabla \phi(\vec{r}, t) \right] dV = 0. \quad (2.35)$$

Ввиду произвольности объема интегрирования и непрерывности подынтегральной функции из (2.35) следует

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla D \nabla \phi + \Sigma_a \cdot \phi - q = 0. \quad (2.36)$$

Перейдем к одной функции  $\phi \equiv n \cdot v$  и получим диффузионное уравнение

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla D \nabla \phi - \Sigma_a \cdot \phi + q. \quad (2.37)$$

В однородной среде коэффициент диффузии  $D$  не зависит от координат:  $D = \text{const}$ , поэтому уравнение упрощается:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \cdot \Delta \varphi - \Sigma_a \cdot \varphi + q, \quad (2.38)$$

где  $\Delta \equiv \nabla^2$  – оператор Лапласа, о котором см. п.2.1. Очень часто в приложениях возникают стационарные задачи (например, при работе реактора на постоянной мощности), в которых плотность потока не изменяется во времени, т.е.  $\partial \varphi / \partial t = 0$ . В этом случае рассматривают стационарное диффузионное уравнение

$$D \cdot \Delta \varphi - \Sigma_a \cdot \varphi + q = 0. \quad (2.39)$$

Отметим, что уравнение диффузии с точки зрения математики представляет собой второй закон Фика (Адольф Фик, 1855).

### 2.4. Ограничения диффузионного приближения

Обратимся теперь к ограничениям, сделанным перед выводом формулы для диффузионного тока, и рассмотрим, могут ли они быть сняты или ослаблены. Кратко повторим здесь эти ограничения.

1. *Среда бесконечна и однородна.*
2. *В среде нет источников.*
3. *Рассеяние изотропно в  $L$ .*
4.  $\Sigma_a \ll \Sigma_s, \Sigma_s \approx \Sigma$ .
5.  $\tau = 1/v \leq T$ .

Ограничение 1 может быть снято в том смысле, что среда может быть и конечной, но оптические размеры ее в длинах свободного пробега должны быть достаточно велики.

Более того, удовлетворительными

следует считать те результаты, полученные по диффузионной теории, которые относятся к областям, удаленным от границ не менее чем на 2-3 длины свободного пробега.

Ограничение 2 также может быть ослаблено, если плотность источников в среде относительно плотности рассеивающих столкновений мала, т.е.  $q(\vec{r}) \ll \varphi \cdot \Sigma_s$ , что на практике обычно наблюдается. В практических задачах обычно соблюдается и ограничение 5.

Окончательно сформулировать условия применимости диффузионного приближения можно следующим образом:

*Диффузионное приближение применимо и результаты решения уравнения диффузии являются корректными для областей, удаленных на расстояние не менее трех длин свободного пробега от сильных источников, поглотителей и границ. Среда, для которой применяется приближение, должна быть диффузионной, т.е. преимущественно рассеивающей, причем рассеивающей изотропно. Источники должны быть равномерно распределены в пространстве, а их угловое распределение должно быть изотропно.*

### 2.5. Граничные условия для диффузионного уравнения

Диффузионное уравнение (2.38) является дифференциальным по времени и координатам, поэтому для решения уравнения оно должно быть дополнено начальными и граничными условиями. Эти условия в совокупности с диффузионным уравнением составляют краевую задачу.

1. Начальные условия налагаются на функцию  $\phi$  следующим образом: в момент времени  $t = 0$  задается начальное распределение плотности потока  $\phi(\vec{r}, t) = f(\vec{r})$ , где  $f(\vec{r})$  – известная функция.

2. Граничные условия в отличие от начальных более разнообразны; рассмотрим простейшие из них.

Прежде всего отметим фундаментальное противоречие диффузионной теории: с одной стороны, диффузионное приближение корректно для областей, удаленных от границ не менее чем на  $\approx 3$  длины свободного пробега; с другой стороны, мы должны формулировать какие-то условия на границе. Это противоречие принципиально неразрешимо. Возможны лишь частные формулировки, например:

а) рассмотрим границу выпуклого (невогнутого) односвязного тела с пустотой. Предположим, что в пустоте нет источников. Описанная ситуация эквивалентна границе тела произвольной формы с абсолютно черным телом (абсолютным поглотителем). Такие граничные условия с хорошим приближением реализуются, например, на поверхности плотной среды (слоев защиты, окружающих реактор) с разреженной средой (воздухом). Отсутствие источников вне тела означает, что плотность тока  $j_-$ , направленного против внешней нормали, равна нулю (см. (2.23)):

$$j_- = \left[ \frac{\phi}{2} + D \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right]_S = 0; \quad (2.40)$$

б) важным видом граничных условий являются контактные, т.е.

условия на границе плотно соприкасающихся диффузионных сред. В данном случае целесообразно предположить, что граница не поглощает и не испускает нейтронов. Можно, например, положить, что плотность результирующего тока на любом участке границы непрерывна при переходе из одной среды в другую. Но поскольку диффузионное уравнение (2.36) – дифференциальное уравнение второго порядка по пространственным переменным, для полной определенности краевой задачи необходимо два, а не одно граничное условие. Поэтому в данном случае естественно сформулировать требования непрерывности плотностей односторонних токов через любой участок границы раздела, т.е. непрерывность  $j_+$  и  $j_-$  при переходе из среды  $A$  в  $B$  и обратно (рис. 2.6). Для простоты представим два плоскопараллельных смежных слоя  $A$  и  $B$ . Условия непрерывности односторонних токов могут быть записаны таким образом:

$$\begin{cases} (j_+)_{S-0} = (j_+)_{S+0}, \\ (j_-)_{S-0} = (j_-)_{S+0}, \end{cases} \quad (2.41)$$

где  $S-0$ ,  $S+0$  обозначают соответственно левосторонний и правосторонний пределы на поверхности раздела. Используя выражения (2.23), получим

$$\begin{cases} \left[ \frac{\varphi}{2} - D \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_{S-0} = \left[ \frac{\varphi}{2} - D \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_{S+0}, \\ \left[ \frac{\varphi}{2} + D \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_{S-0} = \left[ \frac{\varphi}{2} + D \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_{S+0}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Если сначала сложить выражения (2.42), а затем вычесть друг из друга, получим

$$(\varphi)_{S-0} = (\varphi)_{S+0}; \quad D_A \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_{S-0} = D_B \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right]_{S+0}. \quad (2.43)$$

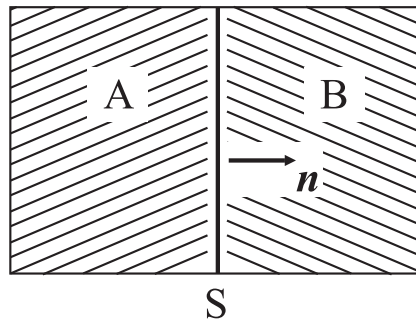


Рис. 2.6. Поверхность раздела  $S$  двух сред  $A$  и  $B$ :  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности среды  $A$



Итак, получено два независимых граничных условия, имеющих прозрачный физический смысл: это непрерывность функций плотности потока и плотности тока (см. также (2.24)).

Граничные условия типа (2.40) и (2.43) не являются единственно возможными; могут быть сформулированы условия внешнего облучения, отражения и т.п. Граничные и начальные условия замыкают краевую задачу для диффузионного уравнения.

## 2.6. Задачи на уравнение диффузии

Рассмотрим решение простейших стационарных задач при помощи диффузионной теории в приближении постоянных сечений (односкоростное стационарное диффузионное уравнение). Подобные задачи могут быть решены аналитическими методами. Более сложные задачи требуют мощных численных методов.

### 2.6.1. Точечный изотропный источник в однородной бесконечной среде

В однородную бесконечную среду поместим точечный изотропный источник, испускающий  $q$  частиц в секунду. Если совместить начало координат с этим источником, то задача будет обладать сферической симметрией (рис. 2.7). В этом случае все точки сферы радиуса  $r$  с центром в начале координат являются равноправными и значения плотности потока в этих точках одинаковы. Рассмотрим задачу в порядке усложнения условий.

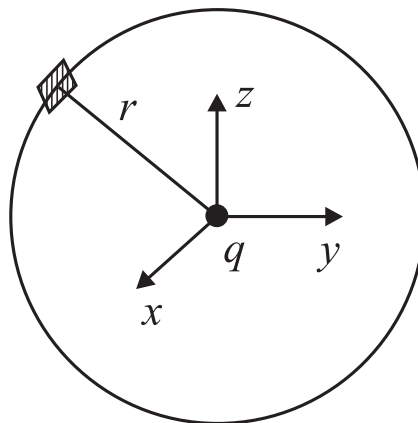


Рис. 2.7. Точечный изотропный источник  $q$ , окруженный сферой

**Среда без взаимодействия.** В среде без взаимодействия макроскопические сечения равны нулю, т.е.  $\Sigma_a = \Sigma_s = \Sigma = 0$ . Эта модель соответствует вакууму. Окружим источник сферой радиуса  $r$  и обозначим  $\phi$  – количество частиц, пересекающих за секунду площадку сферы в  $1 \text{ см}^2$ . По определению – это плотность тока частиц  $j$ . В отсутствие взаимодействия частиц со средой эта величина равна плотности потока  $\phi$ . Если ее умножить на площадь поверхности сферы  $4\pi r^2$ , найдем количество частиц, пересекающих за секунду поверхность всей сферы. Частицы не взаимодействуют внутри сферы, поэтому мощность источника равна мощности выхода частиц с поверхности сферы  $q = j(r) \cdot 4\pi r^2$ . Отсюда получим

$$\phi(r) = j(r) = q \cdot G, \quad \text{где} \quad G = \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (2.44)$$

Ослабление плотности потока с расстоянием происходит по закону обратного квадрата расстояния и обусловлено исключительно геометрическим фактором  $G$ .

**Среда с поглощением.** Усложним модель, допустив взаимодействие: рассмотрим “чистый поглотитель”, т.е.  $\Sigma_s = 0$ ;  $\Sigma = \Sigma_a$ . В данном случае наряду с фактором геометрического ослабления  $G$  необходимо учесть и материальное ослабление  $P$  в соответствии с законом ослабления узкого пучка

$$\phi(r) = j(r) = q \cdot G \cdot P, \quad \text{где} \quad P = \exp(-\Sigma_a r). \quad (2.45)$$

**Диффузионная среда.** Перейдем к рассмотрению диффузионной среды, т.е.  $\Sigma_s \gg \Sigma_a \neq 0$ ;  $\Sigma \approx \Sigma_s$ . Стационарное уравнение диффузии имеет вид

$$D \cdot \Delta \phi - \Sigma_a \cdot \phi + q = 0. \quad (2.46)$$

Для сферически симметричной задачи с источником, расположенным в начале координат, лапласиан представим в виде суммы радиального и углового членов  $\Delta = \Delta_r + \Delta_\Omega$ . В силу изотропности источника и однородности среды все производные по угловым переменным равны нулю, поэтому  $\Delta_\Omega = 0$ , а оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \Delta_r \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right). \quad (2.47)$$

В этом случае получаем одномерную задачу для уравнения диффузии:

$$D \cdot \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) - \Sigma_a \cdot \phi(r) + q(r) = 0 \quad \text{при} \quad r \in [0, +\infty[. \quad (2.48)$$

Для того чтобы избежать особенности при  $r = 0$ , рассмотрим уравнение в открытом интервале  $r \in ]0, +\infty[$ , исключив точку  $r = 0$ . Поскольку вне точки  $r = 0$  в системе нет источников, уравнение диффузии (2.48) примет вид

$$D \cdot \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) - \Sigma_a \cdot \varphi(r) = 0 \quad \text{при } r \in ]0, +\infty[. \quad (2.49)$$

Поделим обе части уравнения (2.49) на  $D \neq 0$ , обозначим  $\lambda^2 \equiv \Sigma_a/D = 3\Sigma_a\Sigma_s > 0$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi(r)}{dr} \right) - \lambda^2 \varphi(r) = 0 \quad \text{при } r \neq 0. \quad (2.50)$$

Применим “стандартную” подстановку  $\varphi(r) = u(r)/r$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d(u(r)/r)}{dr} \right) - \lambda^2 (u(r)/r) = 0 \quad \text{при } r \neq 0. \quad (2.51)$$

Выполнив дифференцирование, приведем уравнение (2.51) к виду

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \lambda^2 u = 0. \quad (2.52)$$

Из справочника по дифференциальным уравнениям найдем общее решение уравнения (2.52):

$$u(r) = A \cdot \exp(-\lambda r) + B \cdot \exp(\lambda r). \quad (2.53)$$

В соответствии с подстановкой плотность потока частиц:

$$\varphi(r) = A \cdot \frac{\exp(-\lambda r)}{r} + B \cdot \frac{\exp(\lambda r)}{r}. \quad (2.54)$$

При  $r \rightarrow \infty$  решение должно оставаться ограниченным, поэтому с необходимостью  $B = 0$ . Отсюда плотность потока частиц будет

$$\varphi(r) = A \cdot \frac{\exp(-\lambda r)}{r}. \quad (2.55)$$

Для определения постоянной  $A$  окружим источник сферой малого радиуса, устремим этот радиус к нулю и воспользуемся соотношением сохранения числа частиц:

$$q = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ j(r) \cdot 4\pi r^2 \right\}. \quad (2.56)$$

Здесь предполагается, что радиус  $r$  настолько мал, что взаимодействиями можно пренебречь. Подставим (2.55) в выражение для плотности диффузионного тока частиц:

$$j(r) = -D \frac{d\varphi}{dr} = A \cdot D \cdot \frac{1 + \lambda r}{r^2} \cdot \exp(-\lambda r). \quad (2.57)$$

Подставив  $j(r)$  из (2.57) в (2.56) и взяв предел, получим  $q = 4\pi \cdot A \cdot D$ . Отсюда легко получить значение константы  $A$  и окончательное выражение для плотности потока частиц:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi D} \cdot \frac{\exp(-\lambda r)}{r}. \quad (2.58)$$

Из (2.57) определим окончательный вид выражения для плотности диффузионного тока частиц:

$$j(r) = \frac{q(1 + \lambda r)}{4\pi r^2} \cdot \exp(-\lambda r). \quad (2.59)$$

Отметим, что константу  $A$  можно искать на основе другого принципа. Поскольку процесс стационарен и утечки частиц из среды нет (вследствие ее бесконечной протяженности), то инициируемые источником частицы должны быть скомпенсированы частицами, поглощенными во всем объеме среды. Используя выражение для плотности поглощающих столкновений  $\Sigma_a \varphi$ , этот баланс запишем в виде

$$q = \int_V \Sigma_a \varphi(r) dV = A \Sigma_a \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^\infty \frac{\exp(-\lambda r)}{r} r^2 dr = 4\pi A \Sigma_a / \lambda^2. \quad (2.60)$$

Отсюда получим прежний результат:  $q = 4\pi \cdot A \cdot D$ . Следует также отметить, что результат (2.58) зависит только от величины  $r$ , т.е. определяется расстоянием от исследуемой точки до источника. Если источник расположен не в начале координат, а в некоторой точке  $\vec{r}_0$ , то плотность потока частиц в произвольной точке  $\vec{r}$  будет иметь вид

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi D} \cdot \frac{\exp(-\lambda |\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (2.61)$$

### 2.6.2. Бесконечный плоский источник

Представим себе бесконечный плоский источник, испускающий равномерно  $q$  частиц с  $1 \text{ см}^2$  площади за секунду в бесконечной однородной среде. Предполагается, что каждая точка плоского источника

испускает частицы изотропно. Выберем систему координат так, чтобы плоскость источника была плоскостью  $x = 0$ . В этом случае при  $x \neq 0$  уравнение (2.46) в декартовых координатах примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \lambda^2\varphi = 0. \quad (2.62)$$

Здесь использовано ранее введенное обозначение  $\lambda^2 \equiv \Sigma_a/D > 0$ . В силу симметрии задачи относительно плоскости  $x = 0$  ограничимся рассмотрением только области  $x \in ]0, +\infty[$ . Из справочника по дифференциальным уравнениям найдем общее решение уравнения (2.62):

$$\varphi(x) = A \cdot \exp(-\lambda x) + B \cdot \exp(\lambda x). \quad (2.63)$$

Учитывая условие ограниченности плотности потока частиц на бесконечности, полагаем  $B = 0$ :

$$\varphi(x) = A \cdot \exp(-\lambda x). \quad (2.64)$$

Чтобы найти константу  $A$ , используем заданную в условии плотность источника  $q$ . Около плоского источника результирующая плотность тока частиц  $j(x)$  равна  $q/2$ :

$$q/2 = \lim_{x \rightarrow 0} j(x). \quad (2.65)$$

Подставим (2.64) в выражение для плотности диффузионного тока частиц:

$$j(x) = -D \frac{d\varphi}{dx} = \lambda \cdot A \cdot D \cdot \exp(-\lambda x). \quad (2.66)$$

Подставив  $j(x)$  из (2.66) в (2.65) и взяв предел, получим  $\lambda \cdot D \cdot A = q/2$ . Отсюда легко можно получить окончательное выражение для плотности потока частиц:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\lambda D} \cdot \exp(-\lambda x). \quad (2.67)$$

Из (2.66) определим окончательный вид выражения для плотности диффузионного тока частиц:

$$j(x) = \frac{q}{2} \cdot \exp(-\lambda x). \quad (2.68)$$

Разумеется, константу  $A$  можно получить, как и в п. 2.6.1, на основе второго принципа:

$$q/2 = \int_V \Sigma_a \varphi(r) dV. \quad (2.69)$$

Формулу (2.67) можно получить и другим путем. Для этого рассмотрим наш плоский источник как составленный из бесконечного числа точечных источников. Пусть  $\Delta s_i$  – один из таких элементарных “точечных” источников (рис. 2.8). Интенсивность его равна  $q\Delta s_i$ . Инициру-

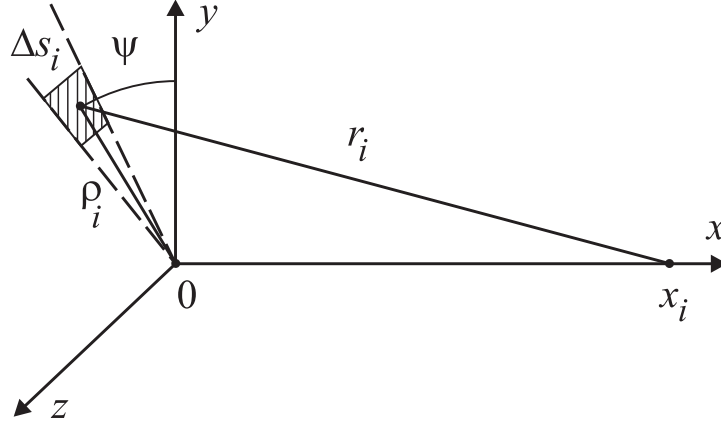


Рис. 2.8. К расчету поля излучения от плоского источника методом суперпозиции точечных источников

емая выделенным источником плотность потока частиц  $\varphi_i(x)$  в точке  $x$  находится с помощью выражения для точечного источника (2.58):

$$\varphi_i(x) = \frac{q\Delta s_i}{4\pi D} \cdot \frac{\exp(-\lambda r_i)}{r_i}. \quad (2.70)$$

Полная плотность потока получится суммированием (2.70) по всем площадкам  $\Delta s_i$ :

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x) = \frac{q}{4\pi D} \iint \frac{\exp(-\lambda r)}{r} ds = \frac{q}{4\pi D} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-\lambda r)}{r} d\psi. \quad (2.71)$$

Перейдем от переменной интегрирования  $\rho$  к переменной  $r$ . Имеем  $r^2 = \rho^2 + x^2$ ,  $rdr = \rho d\rho$ . Следовательно

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi D} \int_x^\infty r dr \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-\lambda r)}{r} d\psi = \frac{q}{2D} \int_x^\infty \exp(-\lambda r) dr = \frac{q}{2\lambda D} \cdot \exp(-\lambda x). \quad (2.72)$$

Полученный результат полностью совпадает с найденным ранее выражением (2.67).

## 2.6.3. Вычисление критического размера шарового гомогенного реактора

Пусть имеется некоторая материальная однородная среда, в состав которой входит делящееся вещество (например, уран). Предположим, далее, что нейтроны в рассматриваемой среде могут появляться только в результате реакции деления в уране, т.е. посторонних источников нейтронов нет. Если обозначить  $\nu$  среднее количество нейтронов, возникающих на один акт деления, и предположить, что все процессы моноэнергетичны (в частности, возникающие при делении нейтроны имеют ту же энергию, что и нейтроны, блуждающие в среде), то уравнение диффузии примет следующий частный вид:

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \cdot \Delta \phi - \Sigma_a \cdot \phi + \nu \Sigma_f \cdot \phi, \quad (2.73)$$

где  $\Sigma_a = \Sigma_c + \Sigma_f$ ;  $\Sigma_c$  – макроскопическое сечение захвата, не приводящего к делению.

Сформулируем теперь следующую физическую задачу: можно ли (а если можно, то при каких условиях) из рассматриваемого вещества сделать шар, в котором поддерживалась бы стационарная цепная реакция?

Математически эта задача формулируется так: можно ли (а если можно, то при каких условиях) в некоторой сфере конечного радиуса получить отличное от нуля положительное решение следующего однородного стационарного уравнения диффузии:

$$D \cdot \Delta \phi + (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) \cdot \phi = 0, \quad (2.74)$$

подчиненное граничному условию на поверхности шара:  $j_- = 0$ . Проанализируем эту задачу сначала *физически*.

Если  $\nu \Sigma_f < \Sigma_a$ , то это означает, что в каждом элементе объема число нейтронов, воспроизводимых в результате деления урана, меньше числа нейтронов, поглощаемых в этом элементе объема. Член  $D \cdot \Delta \phi$ , ответственный за перемещение нейтронов в среде, “работает” в том же направлении, что и захват нейтронов, – в среде конечных размеров имеет место утечка нейтронов из нее. Очевидно, что стационарной цепной реакции в этом случае не может быть.

Если  $\nu \Sigma_f = \Sigma_a$ , то в каждом элементе объема число нейтронов, воспроизводимых в результате деления урана, в точности равно числу нейтронов, выбывающих из этого элемента вследствие захвата. Стационарная цепная реакция может идти, если исключить утечку нейтронов из среды, т.е. сделать среду бесконечно протяженной.

Если  $v\Sigma_f > \Sigma_a$ , то в каждом элементе объема число нейтронов, воспроизводимых в результате деления урана, превышает число нейтронов, поглощаемых в этом элементе объема. Избыток рождающихся нейтронов над поглощенными можно попытаться скомпенсировать утечкой нейтронов из конечной среды. В этом случае есть надежда получить стационарную цепную реакцию в среде конечных размеров.

Дадим теперь строго *математическое* обоснование всем трем случаям, рассмотренным выше.

**Случай I.**  $v\Sigma_f < \Sigma_a$ . Уравнение (2.74) примет при этом вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} - \lambda^2 \phi = 0, \quad (2.75)$$

где  $\lambda^2 = (\Sigma_a - v\Sigma_f)/D > 0$ . Полученное уравнение точно совпадает с уравнением (2.50), общее решение которого дается формулой (2.54).

Прежде всего для нашей задачи легко написать граничное условие при  $r \rightarrow 0$ . Поскольку плотность тока нейтронов  $\phi$  должна быть ограничена в центре сферы, из общего решения сразу следует  $A = -B$ , откуда получаем

$$\phi(r) = A \cdot \frac{\text{sh } \lambda r}{r}. \quad (2.76)$$

Если теперь допустить, что имеется некоторая сфера радиуса  $R$ , в пределах которой задача имеет положительное, отличное от нуля решение (2.76) при  $A > 0$ , то на границе с пустотой должно еще удовлетворяться условие  $j_- = 0$ . Подставляя (2.76) в условие для  $j_- = 0$ , получаем

$$1/2\lambda D + \text{cth } y - 1/y = 0, \quad y \equiv \lambda R > 0, \quad (2.77)$$

$$\text{или } F(y) = 1/2\lambda D, \quad \text{где} \quad (2.78)$$

$$F(y) \equiv 1/y - \text{cth } y = \frac{\text{sh } y - y \cdot \text{ch } y}{y \cdot \text{sh } y}. \quad (2.79)$$

Функцию  $F(y)$  доопределим при  $y = 0$  равенством

$$F(0) = \lim_{y \rightarrow 0} F(y). \quad (2.80)$$

С помощью правила Лопиталя (Гийом Франсуа Лопиталь, 1696) (применяя его дважды) легко находим  $F(0) = 0$ . На основании неравенства  $\text{sh } y > y$  при  $y > 0$  находим

$$\frac{dF(y)}{dy} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\text{sh}^2 y} < 0 \quad \text{при } y > 0. \quad (2.81)$$



Следовательно, функция  $F(y)$  монотонно убывает, начиная с  $F(0) = 0$ , а потому не может при  $y > 0$  принять положительного значения  $1/2\lambda D$  в соответствии с уравнением (2.78). Таким образом, поставленная задача не имеет решения.

**Случай II.**  $v\Sigma_f = \Sigma_a$ . Уравнение (2.74) примет при этом вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad . \quad (2.82)$$

Общее решение этого уравнения легко получить:

$$\varphi(r) = A/r + B. \quad (2.83)$$

Из ограниченности в центре шара следует  $A = 0$ , а из условия  $j_- = 0$  на внешней границе среды:  $B = 0$ . Итак, интересующей нас сферы конечного радиуса не существует.

Отметим, что в бесконечном пространстве ( $r \rightarrow \infty$ ) из (2.83) имеем  $\varphi(r) = B = \text{const}$ .

**Случай III.**  $v\Sigma_f > \Sigma_a$ . Уравнение (2.74) примет при этом вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} + \lambda^2 \varphi = 0, \quad (2.84)$$

где  $\lambda^2 = (v\Sigma_f - \Sigma_a)/D > 0$ . Из справочника по дифференциальным уравнениям находим общее решение уравнения (2.84) в виде

$$\varphi(r) = A \frac{\sin \lambda r}{r} + B \frac{\cos \lambda r}{r}. \quad (2.85)$$

Требованию ограниченности решения в центре сферы можно удовлетворить, положив  $B = 0$ , т.е.

$$\varphi(r) = A \frac{\sin \lambda r}{r}. \quad (2.86)$$

На границе искомой сферы  $r = R$  воспользуемся условием  $j_- = 0$ . Это приводит к трансцендентному уравнению

$$F_1(y) = 1/2\lambda D, \quad y > 0, \quad (2.87)$$

$$\text{где } y \equiv \lambda R \quad \text{и} \quad F_1(y) \equiv 1/y - \text{ctgy} = \frac{\sin y - y \cdot \cos y}{y \cdot \sin y}. \quad (2.88)$$

Доопределим функцию  $F_1(y)$  при  $y = 0$ . Как и в первом случае, здесь легко получить  $F_1(0) = 0$ . При изменении  $y$  от 0 до  $\infty$  функция  $F_1(y)$

претерпевает разрывы в точках  $y_k = k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Рассмотрим подробно первый интервал непрерывности  $F_1(y)$ , т.е.  $0 \leq y \leq \pi$ . С учетом неравенства  $\sin y < y$  для  $y > 0$  получим

$$\frac{dF(y)}{dy} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\sin^2 y} > 0 \quad \text{при } y > 0. \quad (2.89)$$

Таким образом, на промежутке  $0 \leq y \leq \pi$  функция  $F_1(y)$  монотонно возрастает от 0 до  $+\infty$  [ $F_1(0) = 0$ ,  $F_1(\pi) = +\infty$ ]. Следовательно, график функции  $F_1(y)$  на интервале  $0 \leq y \leq \pi$  пересечет горизонтальную прямую  $y = 1/2\lambda D > 0$ , причем в силу монотонного характера изменения функции  $F_1(y)$  такое пересечение произойдет только один раз. Итак, на промежутке  $0 \leq y \leq \pi$  уравнение (2.87) имеет единственный корень  $y_0 < \pi$ . Корень  $y_0$  – наименьший из бесконечного множества положительных корней уравнения (2.87) и определяет критический размер сферического реактора  $R_0 = y_0/\lambda$ : при  $R < R_0$  тривиальное стационарное состояние реактора  $\varphi(r) = 0$  устойчиво и цепная реакция в сфере отсутствует; при  $R > R_0$  стационарное состояние  $\varphi(r) = 0$  абсолютно неустойчиво и цепная реакция в сфере неизбежно зародится и превратится в лавинообразный процесс.

В заключение отметим, что при  $R \leq R_0$  величина  $\lambda r$  не превосходит  $\lambda R_0 = y_0 < \pi$ , а потому плотность нейтронов (2.86) при  $A > 0$  будет строго положительной. Если же рассмотреть любой из промежутков  $0 \leq r \leq R_k$ , где  $R_k$  – радиус сферы, отвечающий какому-либо другому корню  $y_k \neq y_0$  уравнения (2.87), то из равенства (2.86) легко убедиться, что  $\varphi(r)$  будет принимать как положительные, так и отрицательные значения. Этот анализ еще раз показывает, что только величина  $R_0$  имеет физический смысл, т.к. плотность потока нейтронов не может быть отрицательной.

# ГЛАВА 3

## ОДНОСКОРОСТНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

### 3.1. Вводные понятия

В данном разделе будет рассмотрено кинетическое уравнение переноса, восходящее к газокинетическому уравнению, полученному в 1872 г. великим немецким физиком Людвигом Больцманом. Это уравнение называют также кинетическим уравнением Больцмана. С соответствующими оговорками оно пригодно для расчета характеристик полей как нейтронов, так и фотонов; имеются его модификации для расчета переноса заряженных частиц.

Ограничения, свойственные диффузионной теории, существенно сужают круг задач, доступных решению с помощью уравнения диффузии (УД). В “чистом” виде УД применимо только для приближенного решения некоторых реакторных задач, пространственно ограниченных обычно пределами активной зоны. Для расчета сколько-нибудь значимого переноса в околореакторном пространстве по диффузионной теории ее приходится существенно модифицировать.

Диффузионное приближение опирается на предположение изотропности источников и рассеяния. Модель изотропности совершенно непригодна для описания переноса нейтронов, характеризующегося значительными градиентами плотности потока и анизотропностью рассеяния. В такой ситуации основная характеристика поля нейтронов – плотность частиц  $n(\vec{r}, t)$  – неадекватна. Список переменных функции  $n(\cdot)$  должен быть расширен для учета более дифференциальных характеристик поля нейтронов; дополнительные переменные должны информировать о направлении движения частиц. Введем единичный вектор направления движения нейтрона  $\vec{\Omega}$ , связанный с вектором скорости нейтрона  $\vec{v}$  соотношением  $\vec{v} = v \cdot \vec{\Omega}$ . В декартовой системе координат вектор  $\vec{\Omega}$  и его компоненты записываются так (рис. 3.1):

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \cdot \vec{i} + \Omega_y \cdot \vec{j} + \Omega_z \cdot \vec{k}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \Omega_x = \sin \theta \cdot \cos \psi, \\ \Omega_y = \sin \theta \cdot \sin \psi, \\ \Omega_z = \cos \theta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Обобщим понятия, введенные ранее в п.1.1. По аналогии с введенной выше функцией числа нейтронов  $F(\Delta V, t)$ , введем ее обобщение – функцию  $F(\Delta V, \Delta \Omega, t)$ , представляющую собой количество нейтронов

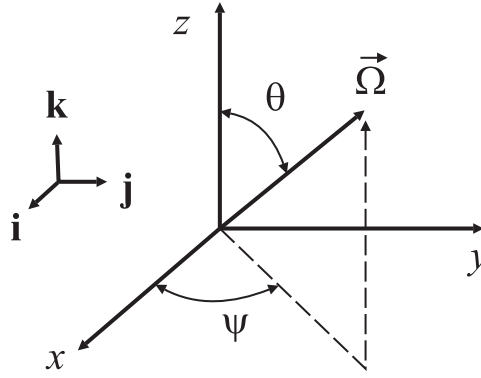


Рис. 3.1. Вектор  $\vec{\Omega}$  в декартовой системе координат

в объеме  $\Delta V$  около некоторой точки  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ , причем направления скоростей нейтронов заключены в телесном угле  $\Delta\Omega$  около некоторого направления  $\vec{\Omega}$ . Очевидно, что функция  $F(\cdot)$  – аддитивная функция области  $\Delta G = (\Delta V, \Delta\Omega)$  и ее производная по области  $\Delta G$

$$\lim_{|\Delta G| \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(\Delta G)}{|\Delta G|} \right\} \equiv \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \Delta\Omega \rightarrow 0}} \left\{ \frac{F(\Delta V, \Delta\Omega, t)}{\Delta V \cdot \Delta\Omega} \right\} \equiv \frac{dF}{dG} = n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t). \quad (3.2)$$

*Определение 1.* Фазовой плотностью нейтронов  $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  называется производная функции  $F(\Delta V, \Delta\Omega, t)$  по области  $\Delta G$ , где  $\Delta G \equiv (\Delta V, \Delta\Omega)$ .

Фазовая плотность нейтронов является обобщением ранее введенной функции плотности нейтронов  $n(\vec{r}, t)$  и связана с ней простым соотношением

$$n(\vec{r}, t) = \int_{4\pi} n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega, \quad \text{где } d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta d\psi. \quad (3.3)$$

*Определение 2.* Введем как аналогию плотности потока  $\phi(\vec{r}, t)$  плотность фазового потока нейтронов  $\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ :

$$\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = v \cdot n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad (3.4)$$

$$\text{причем} \quad \phi(\vec{r}, t) = \int_{4\pi} \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega. \quad (3.5)$$

*Определение 3.* Введем понятие пучка нейтронов  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$ , определив его как совокупность нейтронов, направления скоростей которых заключены в элементарном телесном угле  $\Delta\Omega$  около направления  $\vec{\Omega}$ .

При выводе уравнения переноса (УП) рассмотрим баланс нейтронов, принадлежащих пучку  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$ .

Пусть  $C_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  – число актов  $i$ -го процесса ( $i = a, s, f$ ), вызываемого нейтронами пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$  в объеме  $\Delta V$  за промежуток времени  $\Delta t$ . Эта величина естественным образом обобщает величину  $C_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ , введенную в п.1.7 (1.50), причем очевидно, что

$$C_i(\Delta V, \Delta t) = \int_{4\pi} C_i(\Delta V, \Delta\Omega, \Delta t) d\Omega. \quad (3.6)$$

Величина  $C_i(\Delta V, \Delta\Omega, \Delta t)$  является аддитивной функцией области  $G$ , где  $G \equiv (\Delta V, \Delta\Omega, \Delta t)$ .

*Определение 4.* Производную функции  $C_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  по области  $G =$ , где  $G \equiv (\Delta V, \Delta\Omega, \Delta t)$  будем называть, по аналогии, фазовой плотностью столкновений относительно  $i$ -го процесса.

Вычисляется фазовая плотность столкновений таким образом:

$$\frac{dC_i}{dG} = \Sigma_i(\vec{r}, t) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad \text{где } i = a, s, f. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) получить очень просто, проще, чем получена плотность столкновений в п.1.7, поскольку теперь рассматриваемые нейтроны имеют одинаковое направление скоростей, тогда как в п.1.7 пришлось перестраивать хаотически движущиеся нейтроны в плоско-параллельный пучок.

### 3.2. Плотность кинетического тока нейтронов

Как и перед выводом уравнения диффузии (п.2.3), рассмотрим предварительно задачу о плотности тока нейтронов в кинетической модели. Подсчитаем, сколько нейтронов из пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$  пройдет за промежуток времени  $\Delta t$  через элементарную площадку  $\Delta S$  в сторону ее нормали  $\vec{n}$  (рис. 3.2). Если пренебречь взаимодействием в пучке за малый промежуток времени  $\Delta t$ , а также приходом в пучок и вкладом источников за этот промежуток времени, то все нейтроны пучка, пересекшие площадку  $\Delta S$  за интервал  $\Delta t$ , заполнят изображенный на рис. 3.2 цилиндр с основанием  $\Delta S$  и образующей  $\Delta l = v \cdot \Delta t$ , причем образующая параллельна вектору  $\Omega$ . Объем этого цилиндра  $\Delta V$

$$\Delta V = \Delta S \cdot (v \cdot \Delta t) \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}), \quad (3.8)$$

где  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n})$  – косинус угла между нормалью к площадке и направлением скорости нейтрона, как следует из формулы для объема наклонного

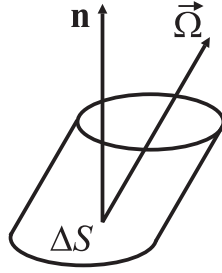


Рис. 3.2. Перенос нейтронов через элементарную площадку  $\Delta S$  в направлении вектора  $\vec{\Omega}$

цилиндра. Искомое количество  $C$  переносимых нейтронов в предположении малости объема

$$\begin{aligned} C &= n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \Delta\Omega \cdot \Delta V = n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \Delta\Omega \cdot \Delta S \cdot v\Delta t \cdot \vec{\Omega}\vec{n} = \\ &= (\vec{\Omega}\vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \Delta\Omega \Delta t \Delta S. \end{aligned} \quad (3.9)$$

К сожалению, не удалось избежать пересечения в обозначениях фазовой плотности  $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  и вектора нормали  $\vec{n}$ . Итак, перенос оказался пропорционален произведению  $(\Delta\Omega \cdot \Delta V)$ .

Если теперь снять ограничения о неизменности пучка (т.е. допустить “работу источников”  $C_q$ , приход из других пучков  $C_s$  и взаимодействия в пучке  $C_a$ ), то дополнительные вклады в суммарное количество нейтронов  $C_\Sigma$  могут быть оценены следующим образом:

$$C_\Sigma = C + C_q + C_s + C_a. \quad (3.10)$$

Рассмотрим эти дополнительные вклады более детально.

1. Вклад источников, распределенных с плотностью  $q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ , пропорционален геометрическому объему, величине пучка и времени “работы” источников, т.е., используя выражение (3.8), получим

$$\begin{aligned} \Delta C_q &= q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \Delta V \Delta\Omega \Delta t = q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot (\Delta S \cdot v\Delta t) \cdot (\vec{\Omega}\vec{n}) \cdot \Delta\Omega \Delta t = \\ &= A_1 \cdot \Delta S \cdot \Delta\Omega \cdot (\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

2. Оценим механический перенос через поверхности цилиндра. Для этого введем векторную величину  $\vec{j}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  – число частиц, движущихся в направлении  $\vec{\Omega}$  в интервале единичного телесного угла и пересекающих в момент времени  $t$  за единичный интервал времени единичную площадку, нормаль к которой совпадает с вектором  $\vec{\Omega}$ . Скалярное произведение  $(\vec{j} \cdot \vec{n})$  определяет плотность вклада нейтронов пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$

в перенос вдоль нормали  $n$ . Если рассматривать  $n$  как нормаль к поверхности цилиндра (см. рис. 3.2), то вклад нейтронов, пересекающих поверхность, пропорционален поверхностному интегралу:

$$\Delta C_s = \Delta t \cdot \Delta \Omega \oint_S \vec{j}(\vec{r}_s, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{n} dS. \quad (3.12)$$

Здесь  $S$  – полная поверхность цилиндра. Преобразуем поверхностный интеграл в объемный в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{j}(\vec{r}_s, \vec{\Omega}, t) \cdot \vec{n} dS \equiv \oint_S \vec{j}(\vec{r}_s, \vec{\Omega}, t) d\vec{S} = \int_{\Delta V} \nabla \vec{j}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dV \quad (3.13)$$

и оценим вклад (3.12):

$$\begin{aligned} \Delta C_s &= \Delta t \cdot \Delta \Omega \cdot \int_{\Delta V} \nabla \vec{j}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dV = b \cdot \Delta t \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta V = \\ &= b \cdot \Delta t \cdot \Delta \Omega \cdot (\Delta S \cdot (v \cdot \Delta t) \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})) = A_2 \cdot \Delta S \cdot \Delta \Omega \cdot (\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3. Наконец, убыль за счет поглощений оценим так:

$$\begin{aligned} \Delta C_a &= \Sigma_a(\vec{r}, t) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \Delta V \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta t = \Sigma_a(\vec{r}, t) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \times \\ &\times (\Delta S \cdot (v \cdot \Delta t) \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})) \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta t = A_3 \cdot \Delta S \cdot \Delta \Omega \cdot (\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из оценок (3.11) – (3.15) следует, что вклады не учтенных вначале процессов имеют более высокий порядок малости, чем основное количество переносимых нейтронов (3.9), а именно неучтенные вклады пропорциональны не произведению  $\Delta S \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta t$ , а  $\Delta S \cdot \Delta \Omega \cdot (\Delta t)^2$ .

В соответствии со смыслом введенной величины  $\vec{j}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  скалярное произведение  $(\vec{j} \cdot \vec{n})$  определяет плотность вклада нейтронов пучка  $(\Delta \Omega)_{\vec{\Omega}}$  в перенос вдоль вектора  $\vec{n}$ , т.е. это и есть искомая производная количества переносимых нейтронов:

$$\begin{aligned} (\vec{j} \cdot \vec{n}) &\equiv \frac{dC_\Sigma}{dG} = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta \Omega \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{C + C_q + C_s + C_a}{\Delta S \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta t} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta \Omega \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left\{ (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \underbrace{\frac{\Delta \Omega \Delta t \Delta S}{\Delta \Omega \Delta t \Delta S}}_{=1} + (A_1 + A_2 + A_3) \cdot \underbrace{\frac{\Delta \Omega \Delta S (\Delta t)^2}{\Delta \Omega \Delta S \Delta t}}_{=0} \right\}. \end{aligned}$$

$$(\vec{j} \cdot \vec{n}) = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t). \quad (3.16)$$

Из выражения (3.16) следует, что

$$\vec{j} = \vec{\Omega} \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t). \quad (3.17)$$

Величину  $\vec{j}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  будем называть векторной фазовой плотностью тока. Теперь можно легко вычислить величины  $j_+$  и  $j_-$ , введенные выше (2.2), определяющие перенос частиц пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$  соответственно в положительном и отрицательном направлении относительно нормали  $\vec{n}$ . Для этого необходимо проинтегрировать модули соответствующих скалярных произведений  $|(\vec{j} \cdot \vec{n})|$

$$\begin{aligned} j_+ &= \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} |(\vec{j} \cdot \vec{n})| d\Omega \equiv \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega; \\ j_- &= \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} |(\vec{j} \cdot \vec{n})| d\Omega \equiv - \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

по направлениям, дающим вклад в перенос в направлении нормали  $\vec{n}$  и против нормали  $\vec{n}$ ; знак “—” у функции  $j_-$  компенсирует отрицательный косинус  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0$ , так как величина  $j_-$  (количество частиц) положительна. Как и ранее, вычислим плотность результирующего тока в положительном направлении  $\vec{n}$ :

$$\begin{aligned} j_n(\vec{r}, t) &= j_+ - j_- = \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega + \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega = \\ &= \int_{4\pi} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отметим, что введенная выше (2.26) плотность векторного тока выражается следующим образом:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{4\pi} \vec{j}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega = \int_{4\pi} \vec{\Omega} \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega. \quad (3.20)$$

### 3.3. Вывод кинетического уравнения

Составим, как и при выводе диффузионного уравнения (2.2), элементарный баланс нейтронов пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$  для некоторого произвольного, но конечного объема  $V$ , “погруженного” в область  $V_0$ , заполненную нейтронами. Баланс составляется для малого промежутка



времени  $\Delta t$ . Ограничения, введенные при получении диффузионного уравнения, снимаются. Остаются более “фундаментальные” ограничения.

1. Все нейтроны имеют одинаковую энергию (скорость).
2. Нейтроны не взаимодействуют между собой.
3. Квантовыми свойствами частиц пренебрегаем.

Ограничение 1 сохраняется для простоты. В дальнейшем будет рассмотрено многоскоростное уравнение, в котором ограничение 1 снимается.

Ограничение 2 определяется тем, что плотности нейтронов и ядер несоизмеримы. Из ограничения 2, в частности, следует линейность уравнения переноса.

Ограничение 3 означает, что при выводе УП эффекты, связанные с поляризацией нейтронов за счет спин-орбитального взаимодействия, не учитываются вследствие их пренебрежимо малого влияния.

Итак, при заданном поле  $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  приращение количества нейтронов пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$  в объеме  $\Delta V$  за промежуток  $\Delta t$

$$\Delta N_V = \Delta\Omega \cdot \int_V \left[ n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t + \Delta t) - n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \right] dV. \quad (3.21)$$

Это приращение обусловлено нижеследующими факторами.

1. Прибыль нейтронов:

1<sup>a</sup>) работа источников;

1<sup>b</sup>) переход из других пучков.

2. Убыль нейтронов:

2<sup>a</sup>) поглощение;

2<sup>b</sup>) рассеяние из пучка;

2<sup>c</sup>) механическое перемещение.

Рассмотрим последовательно компоненты баланса.

1<sup>a</sup>). Если фазовая плотность источников  $q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ , то соответствующий вклад в пучок  $\Delta N_q$  за промежуток времени  $\Delta t$

$$\Delta N_q = \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta\Omega} d\Omega \int_V q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dV = \Delta\Omega \cdot \Delta t \int_V q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dV. \quad (3.22)$$

При вычислении вклада дважды применена теорема о среднем в силу малости интервалов  $\Delta t$  и  $\Delta\Omega$ . То же самое было без упоминания выполнено и при получении выражения (3.21). Далее теорема о среднем будет применяться “автоматически”, т.е. без упоминания.

1<sup>b</sup>). Вычисление прибыли  $\Delta N_{\Omega}$  за счет перехода из других пучков  $(\Delta\Omega')_{\vec{\Omega}'}$  требует описания механизма перехода при рассеянии. Отметим, что здесь следует помнить о приближенном характере нашей односкоростной модели: в соответствии с ней рассеяние не будет сопровождаться потерей энергии.

Рассмотрим вероятность того, что нейтрон, имеющий до рассеяния направление движения  $\vec{\Omega}'$ , после рассеяния попадет в наш пучок  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$ . На рис. 3.3 изображен отрезок AC траектории нейтрона до рассеяния. Начало вектора направления движения нейтрона до рассеяния

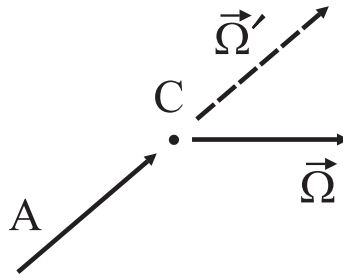


Рис. 3.3. К расчету индикатрисы рассеяния

$\vec{\Omega}'$  совмещено с точкой рассеяния C;  $\vec{\Omega}$  – “ось” пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$ , для которого составляется баланс. Процесс рассеяния “ $\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}$ ” обладает центральной симметрией относительно точки C: в силу однородности и изотропности пространства векторы можно вращать вокруг точки C, не меняя угол между ними. Отсюда с необходимостью следует, что вероятность попадания в наш пучок зависит не от каждого из векторов направления в отдельности, а от угла между ними, т.е. от скалярного произведения  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$ . Далее, эта вероятность  $P$  зависит от величины “кармана”  $\Delta\Omega$ , в который должны попадать нейтроны при рассеянии, и в общем случае от координаты, т.е.  $P(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}', \Delta\Omega)$ . Эта вероятность попадания в конечный “карман”  $\Delta\Omega$ , очевидно, аддитивна по  $\Delta\Omega$ . Ее производная по  $\Delta\Omega$  называется индикатрисой рассеяния  $g(\cdot)$  и является вероятностью для нейтрона рассеяться из единичного телесного угла с “осью”  $\vec{\Omega}'$  в единичный телесный угол с “осью”  $\vec{\Omega}$ :

$$g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{P(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}', \Delta\Omega)}{\Delta\Omega}. \quad (3.23)$$

Для простоты можно считать, что если  $P$  определяет вероятность рассеяния в “карман”  $\Delta\Omega$ , то индикатриса  $g$  определяет вероятность рассеяния из направления  $\vec{\Omega}'$  в направление  $\vec{\Omega}$ . Нормировка индикатрисы рассеяния учитывает тривиальный факт “сохранения нейтрона”

а именно: нейтрон, рассеявшись, попадет в какое-либо направление, принадлежащее полному телесному углу  $4\pi$ :

$$\int_{4\pi} g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') d\Omega = 1. \quad (3.24)$$

Для учета вклада в наш пучок нейтронов из других пучков сначала подсчитаем количество нейтронов, направления движения которых лежат в элементарном телесном угле  $d\Omega'$  с “осью”  $\vec{\Omega}'$ , рассеявшихся в элементарном объеме  $dV$  за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\Delta C_s = \Delta t \cdot \Sigma_s(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) dV d\Omega'. \quad (3.25)$$

Далее необходимо нейтроны (3.25) “развернуть” в направление  $\vec{\Omega}$ , используя оператор индикатрисы рассеяния  $\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}$  (3.23)

$$\Delta C_s \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \Delta t \cdot \Sigma_s(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') dV d\Omega', \quad (3.26)$$

и просуммировать элементарный вклад (3.26) по всему объему  $V$ , по всем исходным направлениям до рассеяния  $\vec{\Omega}'$  и по величине “кармана”  $\Delta\Omega$ ; в последнем интеграле по  $d\Omega$  применим теорему о среднем:

$$\begin{aligned} \Delta N_\Omega &\equiv \int_{\Delta\Omega} d\Omega \int_V dV \int_{4\pi} \Delta C_s \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') d\Omega' = \\ &= \Delta\Omega \cdot \Delta t \cdot \int_V dV \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega'. \end{aligned} \quad (3.27)$$

2<sup>a</sup>). Расчет убыли нейтронов начнем с интегрирования плотности поглощений в пучке:

$$\Delta N_a = \Delta\Omega \cdot \Delta t \cdot \int_V \Sigma_a(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dV. \quad (3.28)$$

2<sup>b</sup>). Аналогично учитывается убыль из пучка за счет рассеяний:

$$\Delta N_s = \Delta\Omega \cdot \Delta t \cdot \int_V \Sigma_s(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dV. \quad (3.29)$$

Возможно рассеяние на малые углы, которое сохраняет направление в пределах пучка  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$ . Оценим его вклад, предполагая закон рассеяния, близкий к изотропному. В этом предположении, не очень сильно

влияющем на результат оценки, доля остающихся  $\Delta R$  в пучке  $(\Delta\Omega)_{\vec{\Omega}}$  из всех рассеявшихся  $\Delta N_s$  пропорциональна величине пучка  $\Delta\Omega$ :

$$\Delta R \sim \Delta N_s \cdot \Delta\Omega = (\Delta\Omega)^2 \cdot \Delta t \cdot \int_V \Sigma_s(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dV \sim (\Delta\Omega)^2 \cdot \Delta t, \quad (3.30)$$

т.е. доля остающихся в пучке имеет порядок малости  $(\Delta\Omega)^2 \cdot \Delta t$ , а все остальные компоненты баланса имеют порядок малости  $\Delta\Omega \cdot \Delta t$ . Ясно, что поправкой (3.30) следует пренебречь.

2<sup>c</sup>). Механический вывод из объема  $V$  подсчитывается, как и при выводе диффузионного уравнения (2.30), интегрированием скалярного произведения (3.19) по всей поверхности  $S$  данного объема. С учетом величин пучка  $\Delta\Omega$  и интервала времени  $\Delta t$  запишем вклад:

$$\Delta N_{sur} = \Delta\Omega \cdot \Delta t \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS \equiv \Delta\Omega \cdot \Delta t \oint_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dS. \quad (3.31)$$

Запишем, наконец, соотношение баланса:

$$\Delta N_v = \Delta N_q + \Delta N_\Omega - \Delta N_a - \Delta N_s - \Delta N_{sur}, \quad (3.32)$$

или подробнее:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega \cdot \int_V \left[ n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t + \Delta t) - n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \right] dV = \Delta\Omega \Delta t \left\{ - \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dS + \right. \\ \left. + \int_V \left[ q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' - \Sigma(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \right] dV \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $\Sigma(\vec{r}) = \Sigma_a(\vec{r}) + \Sigma_s(\vec{r})$  – полное сечение взаимодействия. Для преобразования поверхностного интеграла в объемный воспользуемся, как и при выводе диффузионного уравнения, теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS \equiv \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{j} dV \equiv \int_V \nabla(\vec{\Omega} \cdot \varphi) dV, \quad (3.34)$$

в последнем интеграле продифференцируем произведение  $(\vec{\Omega} \cdot \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \int_V \nabla(\vec{\Omega} \cdot \varphi) dV = \int_V \left[ \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \nabla \vec{\Omega} \right] dV = \int_V (\vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi) dV + \\ + \int_V \left[ \varphi \cdot \left( \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \right] dV = \int_V (\vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi) dV. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Второй из интегралов (3.35) зануляется в силу равенства нулю подынтегральной функции  $\varphi \cdot \text{div} \vec{\Omega}$  (3.1). Перепишем с учетом преобразований соотношение баланса (3.33):

$$\begin{aligned} \Delta\Omega \cdot \int_V \left[ n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t + \Delta t) - n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \right] dV = \\ = \Delta\Omega \cdot \Delta t \cdot \int_V \left[ q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' - \right. \\ \left. - \Sigma(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Поделим обе части равенства на произведение  $\Delta\Omega \cdot \Delta t \neq 0$ , перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и перенесем все члены влево:

$$\int_V \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi + \Sigma \cdot \varphi - q - \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' \right] dV = 0. \quad (3.37)$$

Ввиду произвольности объема интегрирования и непрерывности подынтегральной функции из выражения (3.37) следует равенство нулю подынтегрального выражения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi + \Sigma \cdot \varphi - q - \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' = 0. \quad (3.38)$$

Перейдем к одной функции  $\varphi \equiv n \cdot v$  и запишем уравнение переноса :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \Sigma \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \\ = \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' + q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Интеграл в правой части (3.39) называется *интеграл рассеяния*. Запишем также стационарное уравнение переноса для тех задач, в которых плотность фазового потока  $\varphi$  не зависит от времени:

$$\vec{\Omega} \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\Omega' + q(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (3.40)$$

### 3.4. Граничные условия для кинетического уравнения

Уравнение переноса (3.39) должно быть дополнено начальными и граничными условиями. Начальные условия достаточно тривиальны: в момент времени  $t = 0$  задается распределение плотности фазового потока  $\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0) = f(\vec{r}, \vec{\Omega})$ , где  $f(\vec{r}, \vec{\Omega})$  – известная функция.

Формулировка граничных условий для кинетического уравнения достаточно произвольна. Она должна быть корректна с математической точки зрения и отражать специфику решаемой краевой задачи. В качестве примера формулирования граничных условий рассмотрим простейшие из них, подобные сформулированным для диффузионного уравнения (2.5).

Рассмотрим контактные граничные условия на поверхности раздела двух сред  $A$  и  $B$  (рис. 3.4). Для простоты будем считать, что эта поверхность – плоскость, что не уменьшает общности выводов. Выберем на поверхности раздела произвольную площадку  $S$  и заключим ее в объем  $V$ , образованный, например, плоскостями. Рассмотрим соот-

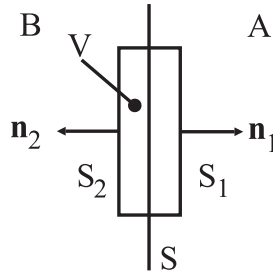


Рис. 3.4. Поперечный разрез объема  $V$ , охватывающего участок поверхности раздела  $S$  двух сред  $A$  и  $B$

ношение баланса (3.33) при “стягивании” объема к поверхности  $S$  (при этом  $S_1 \rightarrow 0$ ,  $S_2 \rightarrow 0$ ,  $S \rightarrow 0$ ). Все объемные интегралы в соотношении (3.33) обращаются в нуль, остается интеграл по поверхности призмы. Он также обращается в нуль, причем поскольку обе пары противоположных граней, кроме пары  $S_1$  и  $S_2$  как имеющие площадь поверхности более высокого порядка малости, исключаются из рассмотрения, то

$$\begin{aligned} & \lim_{S_1 \rightarrow S} \int_{S_1} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dS + \lim_{S_2 \rightarrow S} \int_{S_2} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2) \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) dS = \\ & = \int_{S_1} \left[ (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1) \cdot \varphi(\vec{r} + 0, \vec{\Omega}, t) + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2) \cdot \varphi(\vec{r} - 0, \vec{\Omega}, t) \right] dS = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Поскольку площадка  $S$  произвольна, подынтегральное выражение равно нулю. В пределе  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ ; обозначим  $\vec{n}_1 = \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – нормаль к пло-

щадке  $S$ , и запишем контактные граничные условия на поверхности раздела двух сред:

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r} - 0, \vec{\Omega}, t) = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r} + 0, \vec{\Omega}, t). \quad (3.42)$$

Условия на поверхности раздела невогнутого тела с пустотой, если в пустоте нет источников, могут быть получены подобным же образом. Пусть среда  $A$  на рис. 3.4 – пустота. Рассмотрим выражение (3.42) для входящего излучения, т.е. для  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \leq 0$ , запишем условие отсутствия облучения извне:

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}_s, \vec{\Omega}, t) = 0 \quad \text{при} \quad (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \leq 0. \quad (3.43)$$

### 3.5. Кинетическое уравнение в декартовой системе координат

Уравнение (3.39) записано в общем виде, без конкретизации системы координат. Для решения УП необходим выбор пространственной и угловой координатных систем. Этот выбор определяется соображениями удобства, прежде всего стремлением к максимальной простоте. Степень “упрощения” представления уравнения переноса зависит от конкретной задачи, для решения которой привлекается УП. Максимальное упрощение достигается максимальным отображением симметрии задачи. Так, например, для решения задачи о прохождении излучения от точечного изотропного источника, окруженного однородными шаровыми слоями, целесообразно использовать сферическую систему координат. Отметим, что для записи единичного вектора  $\vec{\Omega}$  всегда используется сферическая система координат.

Основная проблема при записи УП в конкретной системе координат – представление дифференциального оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$ . Рассмотрим скалярное произведение  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$  в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 3.5). Вспомним запись вектора  $\vec{\Omega}$  в декартовой системе координат (3.1):

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \cdot \vec{i} + \Omega_y \cdot \vec{j} + \Omega_z \cdot \vec{k}. \quad (3.44)$$

Соответствующая запись вектора  $\vec{\nabla}$ :

$$\vec{\nabla} = \nabla_x \cdot \vec{i} + \nabla_y \cdot \vec{j} + \nabla_z \cdot \vec{k}, \quad (3.45)$$

где  $\nabla_x \equiv \partial/\partial x$  и т.д. Отсюда скалярное произведение  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) = \Omega_x \cdot \partial/\partial x + \Omega_y \cdot \partial/\partial y + \Omega_z \cdot \partial/\partial z. \quad (3.46)$$

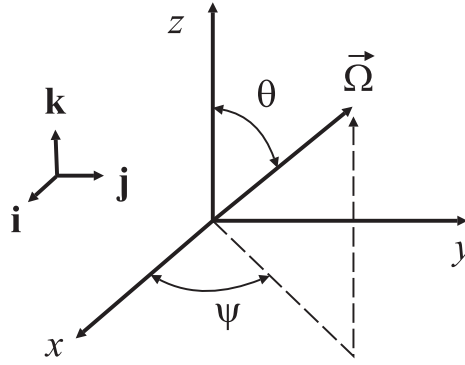


Рис. 3.5. К записи оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$  в прямоугольной декартовой системе координат

Запишем, наконец, уравнение переноса (3.39) в прямоугольной декартовой системе координат (3.1):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sin \theta \cdot \left[ \cos \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \cos \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \cdot \varphi = \\ & = \Sigma_s \cdot \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi g(x, y, z, \mu_0) \cdot \varphi(x, y, z, \theta', \psi', t) \cdot \sin \theta' d\theta' + q(x, y, z, \theta, \psi). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Здесь косинус угла между направлением движения до рассеяния и направлением после рассеяния обозначен  $\mu_0 = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$ . Вычислим эту величину:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = (\Omega_x \cdot \vec{i} + \Omega_y \cdot \vec{j} + \Omega_z \cdot \vec{k}) \cdot (\Omega'_x \cdot \vec{i} + \Omega'_y \cdot \vec{j} + \Omega'_z \cdot \vec{k}) = \\ &= (\Omega_x \cdot \Omega'_x + \Omega_y \cdot \Omega'_y + \Omega_z \cdot \Omega'_z) = (\sin \theta \cdot \cos \psi) \cdot (\sin \theta' \cdot \cos \psi') + \\ &\quad + (\sin \theta \cdot \sin \psi) \cdot (\sin \theta' \cdot \sin \psi') + \cos \theta \cdot \cos \theta' = \\ &= \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cdot \cos(\psi - \psi') \equiv \\ &\equiv \mu \cdot \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sqrt{1 - (\mu')^2} \cos(\psi - \psi'), \\ &\quad \mu \equiv \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3.6. Плоскопараллельные задачи

Рассмотрим запись УП для широкого класса плоскопараллельных задач – задач переноса излучения в плоских слоях. Пусть функции  $g(\mu_0)$  и  $q$ , а также  $\Sigma$  и  $\Sigma_s$  не зависят от координат  $x$  и  $y$  и являются



функциями  $z$ ,  $\theta$  и  $\psi$ . Такая ситуация реализуется в среде, состоящей из бесконечных по  $x$  и  $y$  слоев. В этом случае стационарное УП таково:

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial z} + \Sigma \cdot \phi = \Sigma_s \cdot \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 g(z, \mu_0) \cdot \phi(z, \mu', \psi') d\mu' + q(z, \mu, \psi). \quad (3.49)$$

Уравнение (3.49) получено из стационарного уравнения (3.40), причем сделана обычная в теории переноса замена угловой переменной  $\mu = \cos \theta$ . Если функция источника  $q$  и сечения  $\Sigma$  и  $\Sigma_s$  не зависят от угла  $\psi$ , то от этого угла не будет зависеть и решение  $\phi$ . Это означает, что задача обладает *азимутальной* симметрией, т.е. все точки, лежащие на окружности, образованной концом вектора  $\vec{\Omega}$  при вращении его вокруг оси  $z$  (рис. 3.6), равноправны и неразличимы. В этом случае в интеграле рассеяния в уравнении (3.49) от угла  $\psi$  зависит только

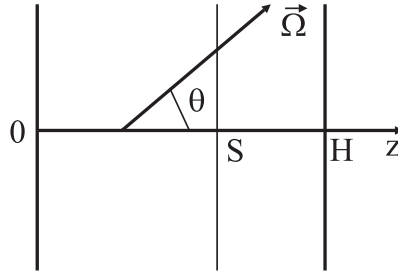


Рис. 3.6. Плоскопараллельная среда, состоящая из двух бесконечных по  $x$  и  $y$  слоев;  $\vec{\Omega}$  – единичный вектор движения нейтрона;  $\theta$  – полярный угол

индикатриса рассеяния  $g(z, \mu_0)$ , которая заранее известна. Поэтому выполним интегрирование (3.48):

$$\bar{g}(z, \mu, \mu') = \int_0^{2\pi} d\psi' g(z, \mu_0), \quad (3.50)$$

и уравнение (3.49) примет вид

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial z} + \Sigma \cdot \phi = \Sigma_s \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}(z, \mu, \mu') \cdot \phi(z, \mu') d\mu' + q(z, \mu). \quad (3.51)$$

Здесь функция  $\phi(z, \mu')$  есть интеграл по  $d\psi$ :

$$\phi(z, \mu') = \int_0^{2\pi} d\psi' \phi(z, \mu', \psi). \quad (3.52)$$

Уравнение (3.51) должно быть дополнено граничными условиями, которые легко получаются из общих условий (3.43) и (3.42).

Если слои на рис. 3.6 граничат с пустотой, то на свободных поверхностях  $z = 0$  и  $z = H$  условия отсутствия облучения таковы:

$$\begin{cases} \mu \cdot \varphi(z = 0, \mu) = 0, & \text{при } \mu > 0; \\ \mu \cdot \varphi(z = H, \mu) = 0, & \text{при } \mu < 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Контактные условия на поверхности смежных слоев  $z = S$ :

$$\mu \cdot \varphi(z = S - 0, \mu) = \mu \cdot \varphi(z = S + 0, \mu). \quad (3.54)$$

Возможно еще большее упрощение УП, если предположить, что рассеяние нейтронов изотропно в лабораторной системе координат. Изотропное рассеяние означает, что вероятность рассеяния  $P$  из направления  $\vec{\Omega}'$  в “карман”  $\Delta\Omega$ , введенная выше в п.3.3,

$$P(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}', \Delta\Omega) = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \quad (3.55)$$

и индикатриса рассеяния имеет вид

$$g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{P(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}', \Delta\Omega)}{\Delta\Omega} = \frac{1}{4\pi}. \quad (3.56)$$

Подставим явный вид изотропной индикатрисы (3.56) в интеграл (3.50)

$$\bar{g}(z, \mu, \mu') = \int_0^{2\pi} d\psi' g(z, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\psi' = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \quad (3.57)$$

и запишем УП для азимутально-симметричных задач с изотропным рассеянием (3.51):

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \cdot \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \cdot \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu') d\mu' + q(z, \mu). \quad (3.58)$$

Уравнение (3.58), в силу своей относительной простоты, является традиционным объектом теоретических исследований. Результатом таких исследований являются доказательства, например, существования и единственности решения задачи переноса в той или иной постановке. Полученные при этом аналитические решения УП могут быть использованы для приближенных оценок характеристик реальных полей излучений, а также в качестве “пробных функций” (начальных приближений) для более точных моделей переноса, опирающихся на численное решение УП.

### 3.7. Кинетическое уравнение в цилиндрической системе координат

Цилиндрическая система координат оказывается особенно удобной, если задача *цилиндрически-симметричная*. Вектор  $\vec{\Omega}$  всегда задается сферическими координатами и его можно определить углами  $\theta$  и  $\psi$ , первый из которых отсчитывается от оси цилиндра, а второй является углом между проекцией вектора  $\vec{\Omega}$  на плоскость поперечного сечения цилиндра и лучом в этой плоскости, проходящим через ось цилиндра и точку  $M = M(\rho, \omega, z)$  местонахождения нейтрона (рис. 3.7). Наличие цилиндрической симметрии предполагает, что все функции не зависят

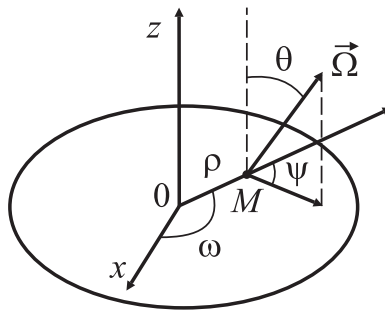


Рис. 3.7. Система координат для цилиндрически-симметричных задач

от азимутального угла  $\omega$ . В стационарном случае плотность потока нейтронов  $\phi$  зависит только от четырех переменных:  $\phi = \phi(\rho, z, \theta, \psi)$ .

Если фиксированы координаты  $\theta$  и  $\psi$  вектора  $\vec{\Omega}$ , то это вовсе не означает, что вектор  $\vec{\Omega}$  сохраняет свою ориентацию в пространстве. Действительно, если перемещать точку  $M(\rho, \omega, z)$  вдоль окружности  $\rho = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ , то при фиксированных значениях  $\theta$  и  $\psi$  вектор  $\vec{\Omega}$  будет менять свое направление. И наоборот, если вектор  $\vec{\Omega}$  сохраняет в пространстве свое направление, то определяющая его совокупность координат  $(\theta, \psi)$  изменяется. Это обусловлено тем, что угол  $\theta$  хотя и остается постоянным, но  $\psi$  меняется при перемещении точки  $M(\rho, \omega, z)$  вдоль, например, той же окружности  $\rho = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ .

При выводе уравнения переноса полагалось, что направление пучка произвольно, но фиксировано. Это означает, что в выбранных координатах оператор градиента действует не только на координаты  $\rho$  и  $z$  функции  $\phi(\rho, z, \theta, \psi)$ , но и на координату  $\psi$ , зависящую от азимутального угла  $\omega$ . Используя выражение для градиента в цилиндрической системе координат, получим

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \cdot \vec{e}_\omega + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \vec{e}_z, \quad (3.59)$$

где  $\vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\omega$ ,  $\vec{e}_z$  – единичные векторы цилиндрической системы координат. Из геометрических соображений легко видеть, что  $d\psi = -d\omega$ . Если учесть, что по определению

$$\vec{\Omega} = \sin \theta \cos \psi \cdot \vec{e}_\rho + \sin \theta \sin \psi \cdot \vec{e}_\omega + \cos \theta \cdot \vec{e}_z, \quad (3.60)$$

то получим результирующее выражение

$$\vec{\Omega} \nabla \varphi = \sin \theta \cdot \left( \cos \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\sin \psi}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \cos \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.61)$$

С учетом  $\mu = \cos \theta$  стационарное уравнение переноса в цилиндрической системе координат примет вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \left( \cos \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\sin \psi}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \\ & = \Sigma_s \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 g(\rho, z, \mu_0) \cdot \varphi(\rho, z, \mu', \psi') d\mu' + q. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Граничные условия без труда можно записать в цилиндрических координатах, если использовать (3.60) и учесть, что на концентрических границах цилиндра  $\vec{n} = \vec{e}_\rho$ , а на перпендикулярных к оси цилиндра плоских границах  $\vec{n} = \pm \vec{e}_z$ .

### 3.8. Кинетическое уравнение в сферической системе координат

К сферической системе координат целесообразно переходить в задачах со сферической симметрией. Напомним, что наибольшие трудности вызывает запись оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$  в конкретной системе координат. Рассмотрим переход подробнее. Вектор  $\vec{\nabla} \varphi$  есть вектор-градиент функции  $\varphi$ :

$$\vec{\nabla} \varphi \equiv \vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3.63)$$

указывающий направление максимальной скорости возрастания  $\varphi$ , а его модуль

$$|\vec{\nabla} \varphi| \equiv \sqrt{\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]^2} \quad (3.64)$$

### 3.8. Кинетическое уравнение в сферической системе координат

равен величине производной по направлению  $d\varphi/ds$ , в котором эта максимальная скорость возрастания достигается. Произведение  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi)$  есть скалярное произведение двух векторов:

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi) = |\vec{\Omega}| \cdot |\vec{\nabla}\varphi| \cdot \cos(\widehat{\vec{\Omega}, \vec{\nabla}\varphi}). \quad (3.65)$$

Рассмотрим направление  $\vec{\xi}$ , совпадающее с направлением движения нейтрона, которое задается единичным вектором  $\vec{\Omega}$ , т.е.  $\vec{\xi} = \vec{\Omega}$  (рис. 3.8). Если  $\xi$  – координата вдоль луча, то скалярное произведение (3.65) мо-

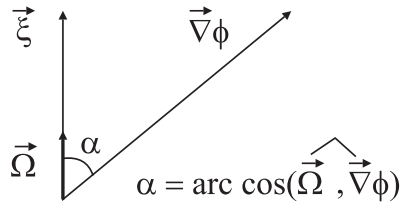


Рис. 3.8. Векторы  $\vec{\xi}$  и  $\vec{\Omega}$  и вектор-градиент  $\vec{\nabla}\varphi$

жет быть записано следующим образом:

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi) = \frac{d\varphi}{ds} \cos(\widehat{\vec{\Omega}, \vec{\nabla}\varphi}) = \frac{d\varphi}{ds} \cos(\widehat{\vec{\xi}, \vec{\nabla}\varphi}) = \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad (3.66)$$

т.е.  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi)$  есть проекция вектор-градиента на направление  $\vec{\xi}$ , или производная по направлению  $\vec{\xi}$ , совпадающему с направлением  $\vec{\Omega}$ . Для записи  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi)$  в сферической системе координат осталось ввести сферические координаты и вычислить производную по направлению.

Мы не будем рассматривать эту процедуру в общем случае. Ограничимся примером вычисления производной по направлению в частном случае, изображенном на рис. 3.9. На этом рисунке сферическая система координат введена следующим образом:  $r$  – расстояние от центра сферически-симметричной системы до рассматриваемой точки;  $\theta$  – угол между радиус-вектором  $r$  и направлением движения нейтрона  $\vec{\Omega}$ . По правилам дифференцирования определим производную функции  $\varphi$  зависящей от переменных  $r$  и  $\mu$  (от  $\mu = \cos\theta$ ):

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{dr}{d\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\xi}. \quad (3.67)$$

Пусть исходная точка с координатами  $(r, \theta)$  сместилась на бесконечно малое расстояние  $d\xi$  вдоль направления  $\vec{\Omega}$ . Из рис. 3.9 очевидно, что

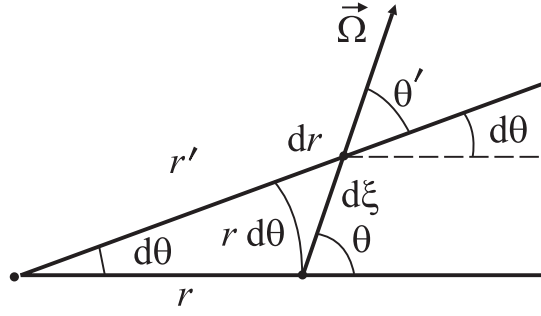


Рис. 3.9. Система координат для сферически-симметричных задач

координаты новой точки будут:  $r' = r + dr$  и  $\theta' = \theta - d\theta$ . Все приращения бесконечно малые, поэтому  $\theta' \approx \theta$ . Из прямоугольного треугольника, образованного сторонами  $r d\theta$ ,  $dr$  и  $d\xi$  (слева от вектора  $\vec{\Omega}$ ), получаем

$$\frac{dr}{d\xi} = \cos \theta = \mu. \quad (3.68)$$

Далее вычисляем вторую компоненту:

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{d\mu}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \cdot \frac{(-\sin \theta)}{r} = -\frac{\sin \theta}{r}. \quad (3.69)$$

Второй сомножитель в (3.69) определяется из того же треугольника:  $\sin \theta = -(r \cdot d\theta)/d\xi$ , где знак “–” компенсирует разные знаки  $d\theta$  и  $d\xi$ . Итак, производная по направлению (3.67) записывается так:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \mu \cdot \frac{d\phi}{dr} + \frac{1 - \mu^2}{r} \cdot \frac{d\phi}{d\mu}. \quad (3.70)$$

В соответствии с этим уравнение переноса для сферически-симметричных задач принимает вид

$$\mu \cdot \frac{d\phi}{dr} + \frac{1 - \mu^2}{r} \cdot \frac{d\phi}{d\mu} + \Sigma(r)\phi = \Sigma_s \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}(r, \mu, \mu') \cdot \phi(r, \mu') d\mu' + q(r, \mu). \quad (3.71)$$

Уравнение дополняется граничными условиями – например такими:

а) отсутствие облучения свободной поверхности  $r = R$  из пустоты:

$$\mu \cdot \phi(r = R, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu < 0; \quad (3.72)$$

б) контактные условия на поверхности смежных слоев  $r = S$ :

$$\mu \cdot \phi(r = S - 0, \mu) = \mu \cdot \phi(r = S + 0, \mu). \quad (3.73)$$

На этом рассмотрение теоретических аспектов, связанных с интегро-дифференциальным уравнением переноса, окончено.

## ГЛАВА 4

### ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

#### 4.1. Ограничения, связанные с интегральным уравнением

Кинетическое уравнение переноса получено при минимальных ограничениях на геометрию среды, характер рассеяния нейтронов и тип источников. Результатом решения кинетического УП является функция  $\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  – плотность фазового потока, дающая исчерпывающую информацию о поле излучения. Диффузионное приближение опирается на существенные ограничения, значительно сужающие сферу применимости диффузионного уравнения; функция  $\varphi(\vec{r}, t)$ , являющаяся решением УД, менее информативна (нет информации об угловом распределении) и, что гораздо важнее, недостоверна вблизи всякого рода особенностей (границ разнородных материалов, мощных источников и стоков).

Существует значительный круг задач переноса излучений, в которых, с одной стороны, наличествуют “кинетические” признаки (источник, сосредоточенный в небольшой области, неоднородности и т.д.), а с другой стороны, пригодна модель изотропности источников и рассеяния, что характерно для диффузионной теории. Для таких задач интегродифференциальное УП может быть значительно упрощено и сведено к интегральному уравнению переноса (ИУП). Место ИУП, как следует из изложенного, находится между ДУ и ИДУП (рис. 4.1). Как ясно из изложенного, в интегральном уравнении искомой функцией является плотность потока  $\varphi(\vec{r}, t)$ , не зависящая от угловых переменных:

$$\varphi_0(\vec{r}, t) = \int_{4\pi} \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega. \quad (4.1)$$

Ниже ИУП будет получено непосредственно из анализа переноса нейтронов. Здесь же сформулируем ограничения на характеристики среды.

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. Среда однородна.</li><li>2. Тело невогнуто.</li><li>3. Рассеяние изотропно.</li><li>4. Источники изотропны.</li></ol> |
|--|

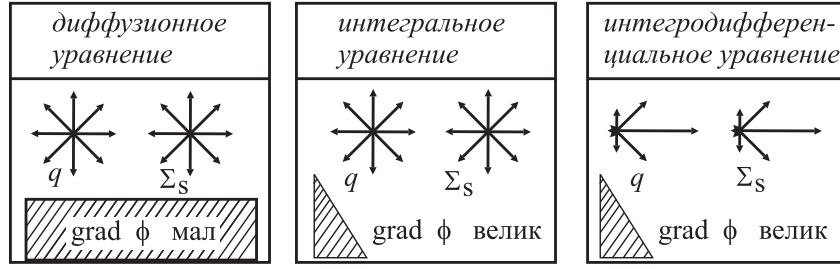


Рис. 4.1. Субординация диффузионного, интегрального и интегродифференциальных уравнений. Условно показаны типы источников, рассеяния и характер пространственного распределения плотности потока  $\phi$

## 4.2. Вывод интегрального уравнения переноса

Пусть однородная невогнутая область  $V$  заполнена нейтронами. Поле нейтронов  $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  в объеме  $V$  задано. Фиксируем некоторую точку с координатами  $\vec{r}_0 \in V$  и окружим ее элементарным объемом  $\Delta V_0$ . Подсчитаем количество нейтронов пучка  $(\Delta \Omega)_{\vec{\Omega}}$  в этом объеме в момент времени  $t_0$ :

$$\Delta N = n(\vec{r}_0, \vec{\Omega}, t_0) \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta V_0. \quad (4.2)$$

Как было показано выше, такое же количество нейтронов пучка  $(\Delta \Omega)_{\vec{\Omega}}$  пересечет за промежуток времени от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  площадку  $\Delta S$ , ориентированную нормально к "оси" пучка, если величины  $\Delta S$  и  $\Delta t$  будут связаны с величиной элементарного объема  $\Delta V_0$  из (4.2) таким образом:

$$v \cdot \Delta S \cdot \Delta t = \Delta V_0. \quad (4.3)$$

Подсчитаем величину (4.2) непосредственно, регистрируя пересечения нейтронами элементарной площадки, расположенной в точке  $\vec{r}_0$  (рис. 4.2). На расстоянии  $\rho$  нейтроны пучка  $(\Delta \Omega)_{\vec{\Omega}}$  должны быть собраны с участка сферической поверхности  $\Delta \Gamma$ :

$$\Delta \Gamma = \rho^2 \cdot \Delta \Omega. \quad (4.4)$$

Полагая толщину сферической поверхности  $d\rho$ , оценим объем шарового слоя  $\Delta V$  под участком сферической поверхности  $\Delta \Gamma$ :

$$\Delta V = \Delta \Gamma \cdot \Delta \rho = \rho^2 \cdot \Delta \rho \cdot \Delta \Omega. \quad (4.5)$$

Необходимо также учесть временной лаг  $\rho/v$  – время пролета нейтрона от поверхности  $\Delta \Gamma$  до площадки  $\Delta S$ . В момент времени  $t_0$  площадку



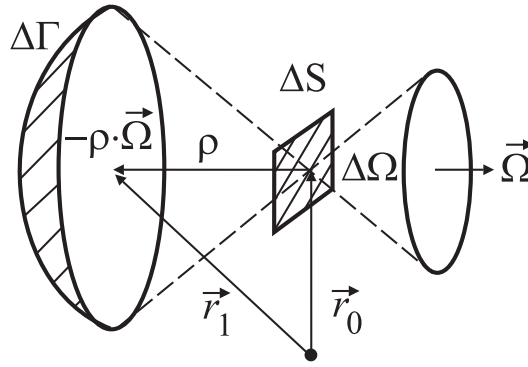


Рис. 4.2. К расчету количества нейтронов, испускаемых поверхностью  $\Delta\Gamma$  и пересекающих площадку  $\Delta S$

$\Delta S$  пересекают частицы, покинувшие поверхность  $\Delta\Gamma$  в более ранний момент времени  $t = t_0 - \rho/v$ . Вероятность  $p$ , что частица из шарового слоя  $\Delta\Gamma$  пересечет площадку  $\Delta S$ , определяется отношением

$$p = \frac{\Delta N(\rho)}{C(\rho)}, \quad (4.6)$$

где  $\Delta N(\rho)$  – количество частиц из шарового слоя  $\Delta\Gamma$ , которые пересекли площадку  $\Delta S$  за промежуток времени от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$ ;  $C(\rho)$  – количество частиц в шаровом слое  $\Delta\Gamma$  в момент времени  $t = t_0 - \rho/v$ .

Процесс сбора частиц разобьем на три независимых этапа, каждый из которых характеризуется своей вероятностью: а) создание нейтронов в шаровом слое  $\Delta\Gamma$  – вероятность  $p_1$ ; б) выход нейтронов из шарового слоя в направлении площадки  $\Delta S$  – вероятность  $p_2$ ; в) транспорт нейтронов от шарового слоя до площадки  $\Delta S$  – вероятность  $p_3$ . Полная вероятность процесса определяется произведением этих вероятностей:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \quad (4.7)$$

Для расчета вероятностей рассмотрим эти этапы более подробно:

а) в отсутствие делящегося материала создание нейтронов в шаровом слое  $\Delta\Gamma$  происходит только в результате изотропного рассеяния глобального потока  $\phi_0$  и вследствие работы изотропных источников в этом объеме. Количество нейтронов, созданных при этом за интервал времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  ( $t = t_0 - \rho/v$ ), таково:

$$\Delta N_Q = \left[ \Sigma_s \cdot \phi_0(\vec{r}, t) + q(\vec{r}, t) \right] \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot \Delta \rho \cdot \Delta \Omega, \quad (4.8)$$

где  $\vec{r}$  – координаты некоторой точки;  $\vec{r} \in \Delta\Gamma$ ;  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \rho \cdot \vec{\Omega}$ ;  $\phi_0$  – глобальный поток (4.1);  $q(\vec{r}, t)$  – функция изотропных источников. Вероятность

$p_1$  создания в шаровом слое новых частиц, которые в дальнейшем дадут вклад в рассматриваемый процесс сбора, таково:

$$p_1 = \frac{\Delta N_Q}{C(\rho)}; \quad (4.9)$$

б) созданные в шаровом слое нейтроны имеют изотропное распределение, поэтому вероятность  $p_2$  выхода нейтронов в направлении площадки  $\Delta S$  определяется только геометрическим соотношением

$$p_2 = \frac{\Delta S}{4\pi\rho^2}; \quad (4.10)$$

в) на пути от точки  $\vec{r}$  до площадки нейтроны будут претерпевать и рассеяния, и поглощения. Вероятность  $p_3$  успешного транспорта нейтронов от поверхности  $\Delta\Gamma$  до площадки  $\Delta S$  определим из закона ослабления плоского пучка (1.30):

$$p_3 = \frac{j(\rho)}{J_0} = \exp(-\Sigma\rho). \quad (4.11)$$

Подставив (4.6), (4.9) – (4.11) в выражение (4.7), после очевидных сокращений получим, что в результате площадку  $\Delta S$  пересечет  $\Delta N(\rho)$  нейтронов из шарового слоя  $\Delta\Gamma$ :

$$\Delta N(\rho) = \frac{\Delta S \Delta\Omega \Delta t}{4\pi} \cdot \left[ \Sigma_s \Phi_0(\vec{r}, t) + q(\vec{r}, t) \right] \cdot \exp(-\Sigma\rho) \Delta\rho. \quad (4.12)$$

Теперь остается просуммировать выражение (4.12) по всем шаровым слоям, на которые разбит объем тела  $V$ , и приравнять полученное выражение к величине (4.2). Устремив максимум разбиения к нулю, перейдем к интегралу по  $\rho$  от нуля (т.е. от точки  $\vec{r}_0$ ) до внешней границы области вдоль вектора  $(-\vec{\Omega})$ :

$$\Delta N = n(\vec{r}_0, -\vec{\Omega}, t_0) \Delta\Omega \Delta V_0 = \frac{\Delta S \Delta\Omega \Delta t}{4\pi} \int_0^{R(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} F(\vec{r}, t) \cdot \exp(-\Sigma\rho) d\rho, \quad (4.13)$$

$$\text{где} \quad F(\vec{r}, t) \equiv \Sigma_s \Phi_0(\vec{r}, t) + q(\vec{r}, t), \quad (4.14)$$

а  $R(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})$  – расстояние от точки  $\vec{r}_0$  до внешней границы области  $V$  вдоль вектора  $(-\vec{\Omega})$ . Аргументы функции  $F(\cdot)$  являются функциями переменной интегрирования  $\rho$ :

$$\begin{cases} t = t_0 - \rho/v, \\ \vec{r} = \vec{r}_0 - \rho \cdot \vec{\Omega}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Подставим в выражение (4.13) значение  $\Delta V_0$  из (4.3) и поделим обе части (4.13) на произведение  $\Delta S \cdot \Delta \Omega \cdot \Delta t \neq 0$ . Вспомнив, что  $\varphi \equiv n \cdot v$ , запишем преобразованное выражение (4.13):

$$\varphi(\vec{r}_0, \vec{\Omega}, t_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{R(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} F(\vec{r}, t) \cdot \exp(-\Sigma \rho) d\rho. \quad (4.16)$$

Проинтегрируем выражение (4.16) по угловой переменной  $\vec{\Omega}$ , определив таким образом вклад всех пучков в пересечение теперь уже *единичной* площадки (также выражение (4.1) для глобального потока):

$$\varphi_0(\vec{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{4\pi} d\Omega \int_0^{R(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} F(\vec{r}, t) \cdot \exp(-\Sigma \rho) \cdot \frac{\rho^2}{\rho^2} d\rho. \quad (4.17)$$

Подынтегральное выражение умножено на  $\rho^2/\rho^2$  для записи интеграла в сферической системе координат с радиусом  $\rho$  (напомним, что в сферической системе  $dV = r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta d\psi = \rho^2 d\rho \sin \theta d\theta d\psi \equiv \rho^2 d\rho d\Omega$ ). Запишем (4.17) как интеграл по объему в сферической системе координат:

$$\varphi_0(\vec{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_V F(\vec{r}, t) \cdot \frac{\exp(-\Sigma \rho)}{\rho^2} dV, \quad dV = \rho^2 d\rho d\Omega. \quad (4.18)$$

Этот интеграл имеет особенность при  $\rho = 0$  (т.е. в точке  $\vec{r}_0$ , в которой размещается единичная площадка, рис. 4.2). В интеграле (4.18) перейдем к переменной интегрирования  $\vec{r}$ , выразив переменные  $\rho$  и  $t$  через  $\vec{r}$  в соответствии с формулами (4.15):

$$\begin{cases} \rho = |\vec{r} - \vec{r}_0|, \\ t = t_0 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{v}. \end{cases} \quad (4.19)$$

При замене переменной учтем  $dV = r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta d\psi = \rho^2 d\rho \sin \theta d\theta d\psi$ . Запишем интеграл (4.18) для новой переменной интегрирования, подставив вместо  $F(\cdot)$  выражение (4.14):

$$\begin{aligned} \varphi_0(\vec{r}_0, t_0) = & \frac{1}{4\pi} \cdot \int_V \left[ \Sigma_s \cdot \varphi_0\left(\vec{r}, t_0 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{v}\right) + \right. \\ & \left. + q\left(\vec{r}, t_0 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{v}\right) \right] \cdot \frac{\exp(-\Sigma \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dV. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) для плотности потока  $\Phi(\vec{r}, t)$  и называется интегральным уравнением переноса (*ИУП*) или уравнением Пайерлса (Рудольф Эрнст Пайерлс, 1946). В случае независимости  $\Phi$  от времени *ИУП* упрощается и называется стационарным интегральным уравнением переноса:

$$\Phi_0(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_V \left[ \Sigma_s \cdot \Phi_0(\vec{r}) + q(\vec{r}) \right] \cdot \frac{\exp(-\Sigma \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dV. \quad (4.21)$$

Обратившись к ограничениям, сделанным перед выводом *ИУП* в п.4.1, убеждаемся, что ограничение однородности среды может быть безболезненно снято: проследив весь вывод *ИУП*, отмечаем, что в случае неоднородной среды изменения коснутся только члена, ответственного за материальное ослабление, и *ИУП* запишется так:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\left[ \Sigma_s \cdot \Phi_0\left(\vec{r}, t_0 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{v}\right) + q\left(\vec{r}, t_0 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{v}\right) \right]}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \times \\ \times \exp \left[ - \int_0^{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \Sigma\left(\vec{r} - \xi \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\right) d\xi \right] dV. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Существенным является ограничение на невогнутость тела, по объему которого выполняется интегрирование: в интегралах (4.17), (4.18) неявно учитывается а) невогнутость объема  $V$  и б) отсутствие внешнего облучения на поверхности этого объема. Следует отметить также, что интегральное уравнение переноса может быть применено и к бесконечной среде – интеграл (4.17) будет сходиться при ограниченной на бесконечности функции  $F(\cdot)$ , т.е. ограниченных плотностях потока и источников. Сходимость обеспечивается тем обстоятельством, что экспоненциальный множитель в интеграле (4.17) при стремлении переменной интегрирования  $\rho$  к нулю также обращается в нуль.

### 4.3. Редукция интегродифференциального уравнения

Интегральное уравнение может быть получено и непосредственно из интегродифференциального УП при учете сформулированных в п.4.1 ограничений. Если рассеяние и источники изотропны, уравнение

(3.39) может быть записано таким образом:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \Sigma \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \cdot \varphi_0(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \cdot q(\vec{r}, t). \quad (4.23)$$

Здесь интеграл рассеяний вычислен в предположении изотропной индикатрисы  $g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = 1/4\pi$ :

$$\int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \cdot \varphi_0(\vec{r}, t), \quad (4.24)$$

а изотропная функция источников представлена так:

$$q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \cdot q(\vec{r}, t), \quad (4.25)$$

т.е. ее нормировка

$$q(\vec{r}, t) = \int_{4\pi} q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega. \quad (4.26)$$

Свяжем переменные  $\vec{r}$  и  $t$  в уравнении (4.23) следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + v \cdot (t - t_0) \cdot \vec{\Omega}. \quad (4.27)$$

Это векторное соотношение описывает движение нейтрона, который в момент времени  $t_0$  находился в точке  $\vec{r}_0$ ;  $\vec{\Omega}$  – направление движения нейтрона (рис. 4.3). Вспомним (4.15):

$$t = t_0 - \rho/v; \quad \vec{r}_0 - \rho \cdot \vec{\Omega}. \quad (4.28)$$

Ясно, что после наложения связи (4.27) функцию  $\varphi$  в уравнении (4.23) можно считать функцией  $\rho$ . Запишем производную этой функции по параметру  $\rho$ , имея в виду, что  $\varphi$  – функция  $\vec{r} = (x, y, z)$  и  $t$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\rho}. \quad (4.29)$$

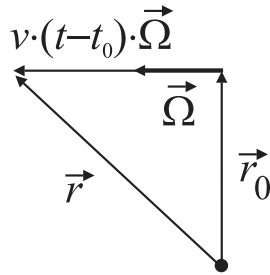


Рис. 4.3. К уравнению движения нейтрона (4.27)

Для вычисления  $dt/dr$  воспользуемся первым выражением (4.28):

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{v}, \quad (4.30)$$

а для вычисления остальных компонент (4.29) воспользуемся покомпонентной записью второго (векторного) соотношения (4.28):

$$x = x_0 - r \cdot \Omega_x; \quad y = y_0 - r \cdot \Omega_y; \quad z = z_0 - r \cdot \Omega_z, \quad (4.31)$$

отсюда

$$\frac{dx}{dr} = -\Omega_x; \quad \frac{dy}{dr} = -\Omega_y; \quad \frac{dz}{dr} = -\Omega_z. \quad (4.32)$$

Запишем, наконец, производную (4.29):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + -\Omega_x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + -\Omega_y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + -\Omega_z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv -\left[ \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\Omega} \nabla \varphi \right]. \quad (4.33)$$

Итак, производная  $\partial \varphi / \partial r$  равна сумме двух первых членов уравнения (4.23) со знаком минус. Запишем уравнение (4.23) для переменной  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(\vec{r}_0 - r \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, t_0 - r/v) - \Sigma \cdot \varphi(\vec{r}_0 - r \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, t_0 - r/v) = \\ = -\frac{1}{4\pi} F(\vec{r}_0 - r \vec{\Omega}, t_0 - r/v), \quad \text{где} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$F(\vec{r}_0 - r \vec{\Omega}, t_0 - r/v) \equiv \Sigma_s \cdot \varphi_0(\vec{r}_0 - r \vec{\Omega}, t_0 - r/v) + q(\vec{r}_0 - r \vec{\Omega}, t_0 - r/v). \quad (4.35)$$

Для фиксированных  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{\Omega}$  и  $t_0$  уравнение (4.35) есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого таково:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}_0 - r \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, t_0 - r/v) = \varphi(\vec{r}_0 - r_0 \vec{\Omega}, \vec{\Omega}, t_0 - r_0/v) \cdot \exp((r - r_0) \cdot \Sigma) - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{r_0}^r F(\vec{r}_0 - r' \vec{\Omega}, t_0 - r'/v) \cdot \exp((r - r') \cdot \Sigma) dr'. \end{aligned} \quad (4.36)$$

В этом решении, не нарушая общности, можно положить  $r = 0$ , а  $r_0$  поместить на границу  $r_0 = R(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})$ . В предположении отсутствия

#### 4.4. Интегральное уравнение для плоскопараллельной задачи

облучения внешней невогнутой поверхности первый член в правой части (4.36)  $\varphi(\cdot) = \exp(\cdot)$  не даст вклад в решение, и окончательно:

$$\varphi(\vec{r}_0, \vec{\Omega}, t_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{R(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} F(\vec{r}, t) \cdot \exp(-\Sigma \rho) d\rho. \quad (4.37)$$

Полученное выражение (4.37) полностью совпадает с промежуточным выражением (4.16), полученным при выводе интегрального уравнения переноса. Дальнейшие выкладки могут быть полностью повторены в соответствии с (4.17)–(4.20).

#### 4.4. Интегральное уравнение для плоскопараллельной задачи

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение переноса для плоскопараллельной задачи. За основу возьмем стационарное интегральное уравнение переноса (4.21):

$$\varphi_0(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_V \left[ \Sigma_s \cdot \varphi_0(\vec{r}) + q(\vec{r}) \right] \cdot \frac{\exp(-\Sigma \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} dV. \quad (4.38)$$

В случае плоскопараллельной геометрии уравнение переноса (4.38) перепишем для однородной бесконечной по  $x$  и  $y$  пластины, распределение источников в которой зависит только от координаты  $z$  (см. рис. 3.6). В этих условиях стационарное уравнение переноса в координатной форме запишется так:

$$\varphi_0(z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^H F(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[ -\Sigma \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} \right]}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} dy. \quad (4.39)$$

Здесь  $H$  – “правая” граница пластины, функция  $F(z)$ :

$$F(z) \equiv \Sigma_s \cdot \varphi_0(z) + q(z). \quad (4.40)$$

Введем на плоскости  $ХОУ$  полярные координаты полюсом в фиксированной точке  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{cases} \rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2, \\ \operatorname{tg} \psi = y/x. \end{cases}$$

В полярной системе координат уравнение (4.39) примет вид

$$\begin{aligned}\varphi_0(z_0) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^H F(z) dz \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -\Sigma \cdot \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2} \right]}{\rho^2 + (z - z_0)^2} \cdot \rho d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^H F(z) dz \int_0^\infty \frac{\exp \left[ -\Sigma \cdot \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2} \right]}{\rho^2 + (z - z_0)^2} \cdot \rho d\rho.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Напомним, что если в декартовой системе  $dS = dx \cdot dy$ , то в полярной системе  $(\rho, \psi)$ :  $dS = \rho d\rho \cdot d\psi$ .

Для дальнейшего упрощения уравнения (4.41) перейдем от интегрирования по  $\rho$  во внутреннем интеграле к интегрированию по параметру  $\lambda = \lambda(\rho)$ , который введем следующим образом. Пусть  $r$  – расстояние от фиксированной точки полюса  $(x_0, y_0, z_0)$  до рассматриваемой точки  $(x, y, z)$ :  $r^2 = \rho^2 + (z - z_0)^2$ . При фиксированном  $(z - z_0)$  расстояние  $r$  изменяется от  $|z - z_0|$  (при  $\rho = 0$ ) до  $\infty$  ( $\rho = \infty$ ). Введем новую переменную  $\lambda$ :  $r = \lambda \cdot (z - z_0)$ . Тогда

$$\lambda^2 = \frac{\rho^2 + (z - z_0)^2}{(z - z_0)^2}, \quad (4.42)$$

отсюда, дифференцируя  $\lambda = \lambda(\rho)$  и вычисляя нижний предел по  $\lambda$ , получим

$$2\lambda \cdot d\lambda = \frac{2\rho \cdot d\rho}{(z - z_0)^2}; \quad \text{при } \rho = 0 \quad \lambda = 1. \quad (4.43)$$

Легко видеть, что

$$\rho d\rho = \lambda \cdot (z - z_0)^2 d\lambda, \quad \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2} = \lambda \cdot |z - z_0|. \quad (4.44)$$

Подставим (4.44) во внутренний интеграл, упростим его:

$$\varphi_0(z_0) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^H F(z) dz \int_1^\infty \frac{\exp(-\lambda \cdot \Sigma \cdot |z - z_0|)}{\lambda} d\lambda. \quad (4.45)$$

Теперь внутренний интеграл представляет собой специальную функцию, называемую интегральной показательной функцией или функцией Плачека (Георг Плачек, 1946) первого порядка. Эти функции определяются так:

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt, \quad n \geq 0, \quad t > 0; \quad (4.46)$$



#### 4.4. Интегральное уравнение для плоскопараллельной задачи

соответственно для  $E_1(x)$ :

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{t} dt. \quad (4.47)$$

При вычислениях можно пользоваться табличными значениями интегральных показательных функций, которые легко получаются по простым рекуррентным соотношениям. Вспомнив выражение для функции  $F$  (4.40) и учитывая представление (4.46), запишем интегральное уравнение для плоскопараллельной задачи:

$$\varphi_0(z_0) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^H [\Sigma_s \cdot \varphi_0(z) + q(z)] \cdot E_1(\Sigma \cdot |z - z_0|) dz. \quad (4.48)$$

Переобозначим переменные для более привычного вида уравнения:  $z_0 \equiv z$ , так как мы хотим записать интегральное уравнение для *любой* точки  $z$ ; переменную интегрирования обозначим  $\xi$ :

$$\varphi_0(z_0) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^H [\Sigma_s \cdot \varphi_0(\xi) + q(\xi)] \cdot E_1(\Sigma \cdot |\xi - z|) d\xi. \quad (4.49)$$

Возможно обобщение ИУ на плоскопараллельную задачу с неоднородными (но только по оси  $z$ !) слоями.

Для решения интегральных уравнений существуют специальные методы. Один из методов, пригодных для решения нашего односкоростного уравнения в плоскопараллельной геометрии (4.49), лежит на поверхности. Уравнение (4.49) может быть переписано в таком виде:

$$\varphi_0 = I(\varphi_0) + Q, \quad \text{где} \quad (4.50)$$

$$I(\varphi_0) = \frac{1}{2} \int_0^H \Sigma_s \cdot \varphi_0(\xi) \cdot E_1(\Sigma \cdot |\xi - z|) d\xi; \quad Q = \frac{1}{2} \int_0^H q(\xi) \cdot E_1(\Sigma \cdot |\xi - z|) d\xi. \quad (4.51)$$

Компонента  $Q$  вычисляется просто (плотность источника  $q$  задана). Опишем схему простейшего варианта метода последовательных приближений. Зададимся начальным приближением  $I^{-1} \equiv 0$ , тогда

$$\varphi_0^{(0)}(z) = Q(z). \quad (4.52)$$

Далее вычисляем  $I^0 \equiv I(\varphi_0^{(0)})$ , подставляем в уравнение (4.50) для получения следующего приближения функции плотности потока:

$$\varphi_0^{(1)}(z) = I(\varphi_0^{(0)}) + Q. \quad (4.53)$$

Тем самым общая схема итерационного процесса

$$\varphi_0^{(n)}(z) = I(\varphi_0^{(n-1)}) + Q, \quad (4.54)$$

а критерий его остановки может быть, например, таким:

$$\max_z \frac{|\varphi_0^{(n)}(z) - \varphi_0^{(n-1)}(z)|}{\varphi_0^{(n)}(z)} < \varepsilon, \quad (4.55)$$

где  $\varepsilon$  – малое число, соответствующее требуемой точности расчетов.

На этом рассмотрение теоретических аспектов, связанных с интегральным уравнением переноса, окончено.

## ГЛАВА 5

### МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Исторически, по-видимому, метод сферических гармоник (*МСГ*) – один из первых методов, примененных к решению уравнений переноса (Джинс, перенос излучения в звездах, 1917; Плачек, Плутониевый проект, 1943 и др.). Метод сферических гармоник состоит в представлении угловой зависимости искомой функции в виде ряда Фурье по специальным функциям – сферическим гармоникам.

#### 5.1. Специальные функции

Предварим дальнейшее изложение некоторыми сведениями о специальных функциях, которые применяются в *МСГ*. Поскольку эти функции будут использоваться в разложениях угловой зависимости, аргументами их сразу же будем считать угловые переменные: косинус полярного угла  $\mu = \cos \theta$  и азимутальный угол  $\psi$ .

**Полиномы Лежандра**  $P_n(\mu)$  могут быть определены как решения гипергеометрического уравнения, частный случай которого имеет вид

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \omega}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\omega}{d\mu} + n(n+1) \cdot \omega = 0, \quad (5.1)$$

где  $-1 < \mu < 1$ ;  $n \geq 0$ . Эти же полиномы могут быть явно определены формулой Родрига:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n!} \frac{d^n}{d\mu^n} \left\{ (1 - \mu^2)^n \right\}. \quad (5.2)$$

Далее нам понадобится рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - \mu(2n+1)P_n(\mu) + n \cdot P_{n-1}(\mu) = 0, \quad (5.3)$$

позволяющее последовательно вычислять полиномы начиная с  $P_2$ . Выпишем несколько первых полиномов:

$$P_0(\mu) = 1; \quad P_3(\mu) = \frac{5\mu^3 - 3\mu}{2};$$

$$\begin{aligned} P_1(\mu) &= \mu; \quad P_4(\mu) = \frac{35\mu^4 - 30\mu^2 + 3}{8}; \\ P_2(\mu) &= \frac{3\mu^2 - 1}{2}; \quad P_5(\mu) = \frac{63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu}{8}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

На отрезке  $[-1, 1]$  последовательность полиномов Лежандра образует полную ортогональную систему:

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) \cdot P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (5.5)$$

**Присоединенные функции Лежандра**  $P_n^{(m)}(\mu)$  могут быть определены как решения гипергеометрического уравнения в частном случае:

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \omega}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\omega}{d\mu} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \cdot \omega = 0, \quad (5.6)$$

где  $-1 < \mu < 1$ ;  $n \geq 0$ ;  $0 \leq m \leq n$ . Эти же функции могут быть явно определены через полиномы Лежандра:

$$P_n^{(m)}(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu), \quad (5.7)$$

откуда следует, что  $P_n^{(0)}(\mu) \equiv P_n(\mu)$  и, далее,  $P_n^{(m)}(\mu) \equiv 0$  при  $m > n$ . Нам понадобится рекуррентное соотношение

$$(n - m + 1)P_{n+1}^{(m)}(\mu) - \mu(2n + 1)P_n^{(m)}(\mu) + (n + m) \cdot P_{n-1}^{(m)}(\mu) = 0. \quad (5.8)$$

Это соотношение переходит в (5.3) при  $m = 0$ . Выпишем несколько первых присоединенных функций Лежандра:

$$\begin{aligned} P_1^1(\mu) &= (1 - \mu^2)^{1/2}; & P_2^2(\mu) &= 3(1 - \mu^2); \\ P_2^1(\mu) &= 3\mu(1 - \mu^2)^{1/2}; & P_3^1(\mu) &= (3/2)(5\mu^2 - 1)(1 - \mu^2)^{1/2}; \\ P_3^2(\mu) &= 15\mu(1 - \mu^2); & P_3^3(\mu) &= 15(1 - \mu^2)(1 - \mu^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

На отрезке  $[-1, 1]$  присоединенные функции Лежандра при фиксированном  $m$  образуют полную ортогональную систему:

$$\int_{-1}^1 P_n^{(m)}(\mu) \cdot P_k^{(m)}(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (5.10)$$

При  $m=0$  соотношение (5.10) переходит в (5.5).

**Сферические функции** (сферические гармоники – СГ)  $Y_n^{(m)}(\mu, \psi)$  связаны с решением уравнения Лапласа в сферической системе координат и могут быть определены через присоединенные функции Лежандра следующим образом:

$$Y_n^{(m)}(\mu, \psi) = P_n^{(m)}(\mu) \sin m\psi; \quad Y_n^{(-m)}(\mu, \psi) = P_n^{(m)}(\mu) \cos m\psi. \quad (5.11)$$

Сферические функции образуют полную ортогональную систему в области  $-1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \psi \leq 2\pi$ :

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 Y_n^{(m)}(\mu, \psi) \cdot Y_k^{(p)}(\mu, \psi) d\mu = \begin{cases} \frac{2\pi(1 + \delta_{m0})}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & \text{если } a); \\ 0, & \text{если } b). \end{cases} \quad (5.12)$$

Здесь условие  $a)$  соответствует  $m = p$  и  $n = k$ ; условие  $b)$  – все остальные случаи. Также использовано обозначение дельта-символа Кронекера  $\delta_{ij}$ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (5.13)$$

## 5.2. Разложение по сферическим гармоникам

Теперь можно изложить суть метода сферических гармоник. Рассмотрим стационарное односкоростное УП:

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + q(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (5.14)$$

Здесь, как обычно,  $\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega})$  – плотность фазового потока нейтронов;  $\vec{\Omega}$  – единичный вектор направления движения нейтрона;  $\Sigma$  – полное макросечение взаимодействия нейтрона с ядрами среды;  $\Sigma_s$  – макросечение рассеяния;  $g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$  – индикатриса рассеяния нейтронов, определяющая плотность вероятности рассеяться из направления  $\vec{\Omega}$  в направление  $\vec{\Omega}'$ ;  $q(\vec{r}, \vec{\Omega})$  – плотность источников.

На рис. 5.1 изображено взаимное расположение двух единичных векторов  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{\Omega}'$ , поясняющее угловые аргументы функций, входящих в УП. Пусть функция  $\varphi$  определена во всех точках поверхности сферы единичного радиуса,  $\varphi = \varphi(M)$ ,  $M \in x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ . Запись  $\varphi(\vec{\Omega})$  эквивалентна  $\varphi(M)$ , где  $\vec{\Omega}$  – единичный радиус-вектор, проведенный из центра сферы. Если поместить начало координат в центр сферы, то

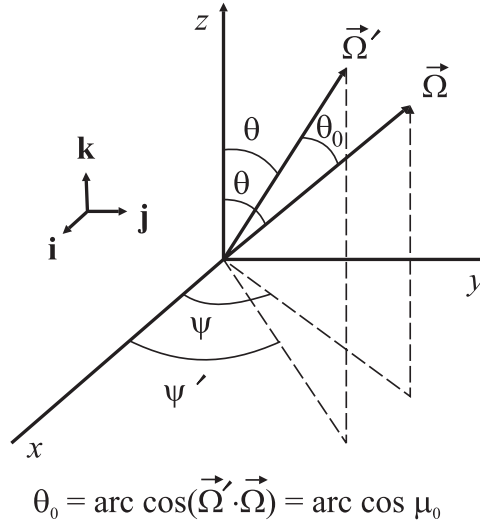


Рис. 5.1. Взаимное расположение векторов  $\vec{Q}$  и  $\vec{Q}'$  в декартовой системе координат

функция  $\phi(\vec{Q})$  будет зависеть от двух аргументов  $\theta$  и  $\psi$  (рис. 5.1) или, как принято, от двух аргументов  $\mu$  и  $\psi$  ( $\mu \equiv \cos \theta$ ). Поэтому функция  $\phi(\vec{Q})$  может быть представлена своим рядом Фурье по сферическим функциям:

$$\phi(\vec{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{2\pi(1+\delta_{m0})} \cdot \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \phi_{nm} \cdot Y_n^{(m)}(\mu, \psi); \quad (5.15)$$

$$\phi_{nm} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 \phi(\vec{Q}) \cdot Y_n^{(m)}(\mu, \psi) d\mu. \quad (5.16)$$

Здесь  $\phi_{nm}$  – коэффициенты ряда, которые часто называют *моменами решения*. Для определения этих коэффициентов следует подставить разложение (5.15) в уравнение переноса (5.14), в котором функцию источника  $q$  также следует представить в виде ряда по сферическим функциям. После выполнения тождественных преобразований исходное интегродифференциальное УП записывается в виде ряда по бесконечной ортогональной системе функций ( $Y_n^{(m)}$ ). Если это разложение умножить поочередно на каждую из сферических функций и интегрировать по  $\mu$  и  $\psi$ , то в силу ортогональности сферических гармоник получим бесконечную систему уравнений, связывающих  $\phi_{nm}$ . В общем случае выкладки довольно громоздки, поэтому ниже рассмотрим простейшие модели.

### 5.3. МСГ для плоскопараллельной задачи

Для проведения описанных выше преобразований уравнения переноса рассмотрим простейшую плоскопараллельную задачу. Напомним, что в плоскопараллельной задаче с азимутальной симметрией  $g(\mu_0)$  и  $q$ , а также  $\Sigma$  и  $\Sigma_s$  не зависят от координат  $x$ ,  $y$ ,  $\psi$  и являются функциями  $z$  и  $\theta(\mu)$ . Такая ситуация реализуется в среде, состоящей из бесконечных по  $x$  и  $y$  однородных слоев, которые могут различаться составом материалов (рис. 5.2). Задача обладает азимутальной сим-

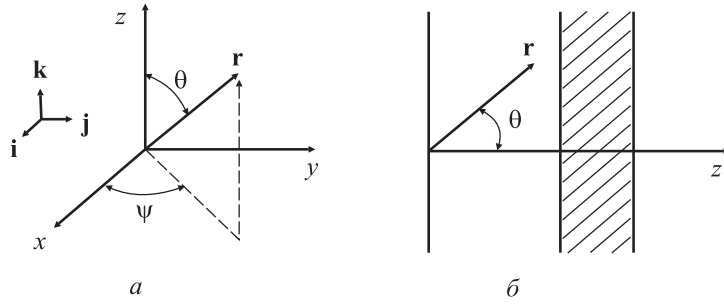


Рис. 5.2. Вектор  $\vec{r}$  в прямоугольной и сферической системах координат (a) и плоскопараллельная задача для двухслойной композиции (b)

метрией, т.е. вращение вектора  $\vec{\Omega}$  вокруг оси  $z$  (рис. 5.2,b) не влияет на решение. Уравнение переноса в данном случае выглядит так:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \cdot \varphi = \Sigma_s \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}(z, \mu, \mu') \cdot \varphi(z, \mu') d\mu' + q(z, \mu). \quad (5.17)$$

$$\text{Здесь} \quad \mu = \cos \theta; \quad \bar{g}(z, \mu, \mu') = \int_0^{2\pi} g(z, \mu_0) d\psi'. \quad (5.18)$$

$$\mu_0 = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2} \cdot (1 - (\mu')^2)^{1/2} \cdot \cos(\psi - \psi').$$

Плотность потока нейтронов  $\varphi$  в уравнении (5.17) не зависит от  $\psi$ , поэтому разложение (5.15) переходит в разложение по полиномам Лежандра. Действительно, все коэффициенты (5.16) для  $m \neq 0$  обращаются в нуль (как интегралы от  $2\pi$ -периодической функции на интервале периода), а  $P_n^{(0)}(\mu) \equiv P_n(\mu)$ . Итак, будем искать решение УП в виде

$$\varphi(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot \varphi_n(z) \cdot P_n(\mu); \quad (5.19)$$

$$\varphi_n = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) \cdot P_n(\mu) d\mu. \quad (5.20)$$

Следует сразу отметить, что первые коэффициенты разложения имеют простой физический смысл (соотношения (5.4)):

$$\varphi_0(z) = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) \cdot P_0(\mu) d\mu = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) d\mu; \quad (5.21)$$

$$\varphi_1(z) = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) \cdot P_1(\mu) d\mu = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) \mu d\mu, \quad (5.22)$$

т.е.  $\varphi_0(z)$  и  $\varphi_1(z)$  с точностью до множителя  $2\pi$  представляют собой плотность полного потока и результирующего тока.

Итак, умножим уравнение (5.17) на  $P_k(\mu)$  ( $k \neq 0$ ) и проинтегрируем по  $\mu$  в пределах от  $-1$  до  $1$ . Рассмотрим преобразования почленно, для простоты не записывая явно разложения  $\varphi$ . Используя формулы (5.3) и (5.19), преобразуем градиентный член:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot P_k(\mu) d\mu &= \frac{d}{dz} \int_{-1}^1 d\mu \varphi(z, \mu) \frac{(k+1)P_{k+1}(\mu) + kP_{k-1}(\mu)}{2k+1} = \\ &= \frac{1}{2k+1} \left[ (k+1) \frac{d\varphi_{k+1}}{dz} + k \frac{d\varphi_{k-1}}{dz} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Второй член уравнения с использованием (5.19) преобразуется тривиально:

$$\int_{-1}^1 \Sigma \cdot \varphi(z, \mu) \cdot P_k(\mu) d\mu = \Sigma \cdot \varphi_k(z). \quad (5.24)$$

Для преобразования интеграла рассеяния разложим прежде всего известную функцию  $g(z, \mu_0)$  (5.18) в ряд по полиномам Лежандра:

$$g(z, \mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot g_n(z) \cdot P_n(\mu_0); \quad (5.25)$$

$$g_n(z) = \int_{-1}^1 g(z, \mu_0) \cdot P_n(\mu_0) d\mu_0. \quad (5.26)$$



Согласно (5.18), функция  $\bar{g}(z, \mu, \mu')$  примет вид

$$\bar{g}(z, \mu, \mu') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot g_n(z) \cdot \int_0^{2\pi} P_n(\mu_0) d\psi', \quad \mu_0 = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'). \quad (5.27)$$

Для дальнейшего преобразования этого выражения воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = P_n(\vec{\Omega}) \cdot P_n(\vec{\Omega}') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot P_n^{(m)}(\mu) \cdot P_n^{(m)}(\mu') \cdot \cos m(\psi - \psi'). \quad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.27) и интегрируя, получаем

$$\bar{g}(z, \mu, \mu') = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot g_n(z) \cdot P_n(\mu) \cdot P_n(\mu'). \quad (5.29)$$

Теперь обратимся непосредственно к преобразованию интеграла рассеяния:

$$\begin{aligned} \Sigma_s \int_{-1}^1 \bar{g}((z, \mu, \mu')) \cdot \varphi(z, \mu') d\mu' &= \\ &= 2\pi \Sigma_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot g_n(z) \cdot P_n(\mu) \cdot \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu') \cdot P_n(\mu') d\mu' = \\ &= 2\pi \Sigma_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot g_n(z) \cdot \varphi_n(z) \cdot P_n(\mu). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Умножив (5.30) на  $P_k(\mu)$  и проинтегрировав по  $\mu$  в пределах  $-1, 1$ , получим

$$2\pi \Sigma_s \cdot g_k(z) \cdot \varphi_k(z). \quad (5.31)$$

Функция источника  $q(z, \mu)$  преобразуется подобно второму члену (5.25). Собрав преобразованные члены, запишем систему дифференциальных уравнений относительно величин  $\varphi_k(z)$ :

$$k \frac{d\varphi_{k-1}}{dz} + (k+1) \frac{d\varphi_{k+1}}{dz} + (2k+1) \Sigma_k \varphi_k = (2k+1) \cdot q_k; \quad (5.32)$$

$$\Sigma_k = \Sigma - 2\pi \Sigma_s \cdot g_k. \quad (5.33)$$

Для более простого уравнения с изотропным рассеянием

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \cdot \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \cdot \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu') d\mu' + q(z, \mu) \quad (5.34)$$

получается такая же система (5.32), но  $\Sigma_k$  определяется иначе:

$$\Sigma_k = \begin{cases} \Sigma_a & \text{при } k = 0, \\ \Sigma & \text{при } k \neq 0, \end{cases} \quad (5.35)$$

так как в (5.33) величина  $g_k$ :

$$g_k = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 P_k(\mu_0) d\mu_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 P_0(\mu_0) \cdot P_k(\mu_0) d\mu_0 = 0, \quad \text{если } k \neq 0. \quad (5.36)$$

#### 5.4. Граничные условия в МСГ

Систему уравнений (5.32) следует дополнить граничными условиями. Контактные условия на поверхности смежных слоев  $z = S$  таковы:

$$\mu \cdot \varphi(z = S - 0, \mu) = \mu \cdot \varphi(z = S + 0, \mu). \quad (5.37)$$

Умножим (5.37) на  $P_k(\mu)$  и проинтегрируем по  $\mu \in [-1, 1]$ . Практически повторяя преобразования первого члена (5.23), получим условия на поверхностях разрыва коэффициентов:

$$(k+1)\varphi_{k+1}(S-0) + k \cdot \varphi_{k-1}(S-0) = (k+1)\varphi_{k+1}(S+0) + k \cdot \varphi_{k-1}(S+0), \\ k=0, 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

Если слои на рис. 5.2 граничат с пустотой, то на свободных поверхностях  $z = 0$  и  $z = H$  условия отсутствия облучения таковы:

$$\begin{cases} \mu \cdot \varphi(z = 0, \mu) = 0 & \text{при } \mu > 0, \\ \mu \cdot \varphi(z = H, \mu) = 0 & \text{при } \mu < 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Напрямую применить МСГ к граничным условиям (5.39) невозможно, поскольку условие (5.39) имеет смысл на полуинтервале  $\mu \in [-1, 0]$ , а не на интервале  $\mu \in [-1, 1]$ , на котором ортогональна выбранная система полиномов. Необходима искусственная конструкция граничных условий, выходящая за рамки МСГ. Таких конструкций можно

придумать множество, но наилучшими считаются условия Маршака (Роберт Юджин Маршак, 1947). Они отвечают условию баланса (“полный ток извне равен нулю”):

$$j_{-z}(H) = -2\pi \int_{-1}^0 \mu \cdot \varphi(H, \mu) d\mu = 0. \quad (5.40)$$

Требованию (5.40) удовлетворяет четный набор полиномов Лежандра, и граничное условие (5.39) заменяется равенствами

$$\int_{-1}^0 \mu \cdot \varphi(H, \mu) \cdot P_{2k}(\mu) d\mu = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.41)$$

которые с помощью рекуррентного соотношения (5.3) для полиномов Лежандра приводятся к виду

$$\int_{-1}^0 \varphi(H, \mu) \cdot P_{2k+1}(\mu) d\mu = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.42)$$

где запись  $\varphi(H, \mu)$  подразумевает разложение (5.19). Условия (5.42) и называются условиями Маршака.

Полученная бесконечная система уравнений, дополненная граничными условиями, требует дальнейших упрощений. Даже для простейшей плоскопараллельной задачи, рассматриваемой в данном разделе, решение полной системы (5.38) возможно только в исключительных случаях, абсолютно неинтересных для практики.

Разумным является допущение, что первые  $(n + 1)$  членов ряда описывают искомую функцию с достаточной точностью: остальные члены ряда отбрасываются. Полученная таким образом система уравнений определяет  $P_n$  -приближение МСГ. Наиболее употребительны в практике низшие приближения МСГ, так как трудоемкость вычислений возрастает с порядком приближения очень быстро.

### 5.5. $P_1$ -приближение МСГ

Рассмотрим  $P_1$  -приближение МСГ. В соответствии с вышесказанным в разложении (5.19) удерживается  $(n + 1) \rightarrow 1 + 1 = 2$  члена и искомая функция представляется в виде

$$\varphi(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot \varphi_n(z) \cdot P_n(\mu) \approx \sum_{n=0}^1 \frac{2n+1}{2} \cdot \varphi_n(z) \cdot P_n(\mu) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \varphi_0(z) + 3\mu \cdot \varphi_1(z) \right]. \quad (5.43)$$

Уравнения  $P_1$  -приближения получим из соотношений (5.32):

$$\begin{cases} k=0: & \frac{d\varphi_1}{dz} + \Sigma_0 \cdot \varphi_0 = q_0; \\ k=1: & \frac{d\varphi_0}{dz} + 3\Sigma_1 \cdot \varphi_1 = 3q_1, \end{cases} \quad (5.44)$$

а компоненты граничных условий получим а) из (5.38) для поверхностей  $S$  разрыва коэффициентов УП:

$$\begin{cases} k=0: & \varphi_1(S-0) = \varphi_1(S+0); \\ k=1: & \varphi_0(S-0) = \varphi_0(S+0) \end{cases} \quad (5.45)$$

и б) из (5.42) для “правой”  $z = H$  (рис. 5.2,б) свободной поверхности при  $k = 0$ :

$$\int_{-1}^0 \varphi(H, \mu) \cdot P_1(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left[ \varphi_0(H) + 3\mu \varphi_1(H) \right] \mu d\mu; \quad (5.46)$$

$$\varphi_0(H) - 2\varphi_1(H) = 0.$$

Для “левой” свободной поверхности  $z = 0$  изменяется интервал интегрирования (по входящему излучению,  $[0, +1]$ ), и условия получаются такими:

$$\varphi_0(z=0) + 2\varphi_1(z=0) = 0. \quad (5.47)$$

Решив систему уравнений (5.44) с соответствующими граничными условиями, получим функции  $\varphi_0(z)$  и  $\varphi_1(z)$ . С помощью этих функций (моментов решения) восстанавливается искомая функция  $\varphi(z, \mu)$  (5.43). Далее будет подробно рассмотрено получение конечно-разностных аналогов системы (5.44) и их решение.

## 5.6. Связь $P_1$ -приближения МСГ с диффузионным приближением

Пусть функция источника в уравнении (5.17) изотропна, т.е.

$$q(z, \mu) = \frac{1}{2} \cdot q(z). \quad (5.48)$$

## 5.6. Связь $P_1$ -приближения МСГ с диффузионным приближением

Это означает, что ее нормировка такова:

$$q(z) = \int_{-1}^1 q(z, \mu) d\mu. \quad (5.49)$$

Из изотропности функции источников следует, что все моменты разложения  $q$  в ряд по полиномам Лежандра равны нулю, т.е. в системе (5.44)  $q_1 = 0$ . Из второго уравнения этой системы получим

$$\varphi_1 = -\frac{1}{3\Sigma_1} \cdot \frac{d\varphi_0}{dz} \equiv -D \frac{d\varphi_0}{dz} \quad \left[ D = \frac{1}{3\Sigma_1} \right], \quad (5.50)$$

т.е. плотность тока (5.50) с точностью до коэффициента диффузии  $D$  совпадает с плотностью результирующего диффузионного тока, рассмотренного ранее:

$$j_{+z} = -\frac{1}{3\Sigma_s} \cdot \frac{d\varphi_0}{dz} \equiv -D \frac{d\varphi_0}{dz} \quad \left[ D = \frac{1}{3\Sigma_s} \right]. \quad (5.51)$$

Совпадение будет полным, если мы наложим дополнительные ограничения, диктуемые диффузионной теорией: изотропное рассеяние в лабораторной системе координат и слабое поглощение  $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ , откуда на основании (5.33)  $\Sigma_1 = \Sigma \approx \Sigma_s$  и  $1/3\Sigma_1 \approx 1/3\Sigma_s$ . Далее подставляем (5.50) в первое уравнение системы (5.44) и получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $\varphi_0$ :

$$\frac{d}{dz} D \frac{d\varphi_0}{dz} - \Sigma_0 \varphi_0 = -q_0 \quad (\Sigma_0 \equiv \Sigma_a), \quad (5.52)$$

а это и есть стационарное уравнение диффузии

$$\nabla D \nabla \varphi - \Sigma_a \cdot \varphi + q = 0, \quad (5.53)$$

полученное ранее непосредственно для диффузионной плотности потока  $\varphi$ . Граничные условия (5.45) – (5.47) с помощью равенства (5.50) переходят в диффузионные условия. В частности, для условия (5.46) получается

$$\varphi_0 + 2D \cdot \frac{d\varphi_0}{dz} = 0, \quad (5.54)$$

в то время как соответствующее диффузионное граничное условие на свободной поверхности

$$j_{-z} = \left[ \varphi/2 + D \cdot \frac{d\varphi}{dz} \right]_{z=0} = 0. \quad (5.55)$$

Следует отметить, что такая редукция возможна для любой геометрии задачи, т.е. в любой системе координат.

### 5.7. $P_2$ - приближение МСГ

Получим более высокое  $P_2$  - приближение МСГ. Искомая функция представляется в виде

$$\varphi(z, \mu) \approx \sum_{n=0}^2 \frac{2n+1}{2} \varphi_n(z) P_n(\mu) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_0(z) + 3\mu \varphi_1(z) + \frac{5}{2} (3\mu^2 - 1) \varphi_2(z) \right]. \quad (5.56)$$

Из соотношений (5.32) следует:

$$\begin{cases} k=0: & \frac{d\varphi_1}{dz} + \Sigma_0 \cdot \varphi_0 = q_0, \\ k=1: & \frac{d\varphi_0}{dz} + 2 \frac{d\varphi_2}{dz} + 3\Sigma_1 \cdot \varphi_1 = 3q_1, \\ k=2: & 2 \frac{d\varphi_1}{dz} + 5\Sigma_2 \cdot \varphi_2 = 5q_2, \end{cases} \quad (5.57)$$

а компоненты граничных условий получим а) из (5.38) для поверхностей разрыва коэффициентов УП:

$$k=0, 2: \quad \varphi_1(S-0) = \varphi_1(S+0), \quad (5.58)$$

т. е. один и тот же результат для  $k=0$  и  $k=2$ ;

$$k=1: \quad \varphi_0(S-0) + 2\varphi_2(S-0) = \varphi_0(S+0) + 2\varphi_2(S+0) \quad (5.59)$$

и б) из (5.42) для “правой” свободной поверхности при  $k=0, 1, 2$ :

$$a_0\varphi_0(H) + a_1\varphi_1(H) + a_2\varphi_2(H) = 0; \quad a_k = (2k+1) \int_{-1}^0 \mu \cdot P_k(\mu) d\mu. \quad (5.60)$$

Для  $P_2$ -приближения количество граничных условий такое же, как и для  $P_1$  - приближения, а количество уравнений (5.57) на единицу больше. Но это не свидетельствует о недоопределенности задачи: в системе (5.57) на самом деле два, а не три дифференциальных уравнения (см. ниже уравнения (5.69)).

### 5.8. $P_3$ - приближение МСГ

Искомая функция представляется в виде

$$\varphi(z, \mu) \approx \frac{1}{2} \left[ \varphi_0(z) + 3\mu \varphi_1(z) + \frac{5}{2} (3\mu^2 - 1) \varphi_2(z) + \frac{7}{2} (5\mu^3 - 3\mu) \varphi_3(z) \right]. \quad (5.61)$$

Из соотношений (5.32) следует:

$$\left\{ \begin{array}{l} k=0: \quad \frac{d\varphi_1}{dz} + \Sigma_0 \cdot \varphi_0 = q_0, \\ k=1: \quad \frac{d\varphi_0}{dz} + 2\frac{d\varphi_2}{dz} + 3\Sigma_1 \cdot \varphi_1 = 3q_1, \\ k=2: \quad 2\frac{d\varphi_1}{dz} + 5\Sigma_2 \cdot \varphi_2 = 5q_2, \\ k=3: \quad 3\frac{d\varphi_2}{dz} + 7\Sigma_3 \cdot \varphi_3 = 7q_3. \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Из граничных условий (5.38) получим непрерывность следующих функций:  $\varphi_1$ ,  $2\varphi_2 + \varphi_0$ ,  $3\varphi_3 + 2\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ; отсюда ясно, что непрерывна каждая из функций:

$$\begin{array}{ll} \varphi_0(S-0) = \varphi_0(S+0); & \varphi_1(S-0) = \varphi_1(S+0); \\ \varphi_2(S-0) = \varphi_2(S+0); & \varphi_3(S-0) = \varphi_3(S+0). \end{array} \quad (5.63)$$

На “правой” свободной поверхности  $z = H$  из (5.42) получим

$$\sum_{k=0}^3 a_k \cdot \varphi_k(H) = 0, \quad \sum_{k=0}^3 b_k \cdot \varphi_k(H) = 0, \quad \text{где} \quad a_3 = b_1 = 0. \quad (5.64)$$

$$a_k = (2k+1) \int_{-1}^0 P_k(\mu) \cdot P_1(\mu) d\mu, \quad b_k = (2k+1) \int_{-1}^0 P_k(\mu) \cdot P_3(\mu) d\mu.$$

### 5.9. Редукция $P_2$ - уравнений МСГ к $P_1$ - уравнениям

Уравнения  $P_2$  - приближения могут быть приведены к виду, формально совпадающему с уравнениями в  $P_1$  - приближении МСГ. Из последнего уравнения системы (5.57) выразим функцию  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = -\frac{2}{5\Sigma_2} \cdot \frac{d\varphi_1}{dz} + \frac{q_2}{\Sigma_2}, \quad (5.65)$$

а из первого уравнения – производную ( $d\varphi_1/dz$ ):

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = q_0 - \Sigma_0 \cdot \varphi_0. \quad (5.66)$$

Подставим последовательно (5.66) в (5.65) и во второе уравнение (5.57):

$$\frac{d\varphi_0}{dz} + 2\frac{d}{dz} \left[ \frac{2}{5} \cdot \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \varphi_0 - \frac{2}{5\Sigma_2} q_0 + \frac{q_2}{\Sigma_2} \right] + 3\Sigma_1 \cdot \varphi_1 = 3q_1. \quad (5.67)$$

Далее в уравнении (5.67) упорядочим члены следующим образом:

$$\frac{d}{dz} \left[ \left( 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \right) \cdot \varphi_0 - \frac{4}{5\Sigma_2} q_0 + 2\frac{q_2}{\Sigma_2} \right] + 3\Sigma_1 \cdot \varphi_1 = 3q_1. \quad (5.68)$$

Теперь первые два уравнения системы (5.57) могут быть записаны так:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_0}{dz} + \alpha \cdot \Sigma_0 \cdot \Phi_0 = \alpha \cdot Q_0, \\ \frac{1}{3} \frac{d\Phi_0}{dz} + \Sigma_1 \cdot \Phi_1 = Q_1, \end{cases} \quad (5.69)$$

где  $\Phi_1 \equiv \varphi_1$ ,  $\Phi_0 = \left( 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \right) \cdot \varphi_0$ ;

$$\alpha = \left( 1 + \frac{4\Sigma_0}{5\Sigma_2} \right)^{-1}; \quad Q_0 = q_0 + 2\frac{\Sigma_0}{\Sigma_2} \cdot q_2; \quad Q_1 = q_1. \quad (5.70)$$

Граничные условия преобразуются аналогично. Система уравнений (5.69) формально близка системе уравнений  $P_1$  - приближения МСГ (5.44). Располагая алгоритмом решения  $P_1$  - уравнений, можно скорректировать значения  $\Sigma_0$  и  $q_0$  из (5.44), умножив их на  $\alpha$ :

$$\bar{\Sigma}_0 \equiv \alpha \cdot \Sigma_0; \quad \bar{q}_0 \equiv \alpha \cdot \left( q_0 + \frac{2\Sigma_0}{\Sigma_2} q_2 \right). \quad (5.71)$$

Решив получившиеся “квази- $P_1$ -уравнения” для функций  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ , получим функции плотности потока и тока (5.70):

$$\varphi = \Phi_1; \quad \varphi_0 = \alpha \cdot \left[ \Phi_0 + \frac{2}{5\Sigma_2} (5q_2 - 2q_0) \right]. \quad (5.72)$$

Таким образом, практически без увеличения объема вычислительной работы можно повысить точность вычисления плотности потока  $\varphi_0$  и плотности тока  $\varphi_1$ . Подчеркнем еще раз, что два уравнения системы (5.69) свидетельствуют о том, что исходная система (5.68) в действительности содержит только два дифференциальных уравнения.



### 5.10. Разностная аппроксимация $P_1$ - уравнений

В качестве примера реализации вычислительных схем низких приближений МСГ рассмотрим подробнее схему для уравнений  $P_1$  - приближения применительно к плоскопараллельной задаче.

Функции плотности потока, тока и источника аппроксимируем следующим образом:  $w \sim \varphi_0$ ,  $v \sim \varphi_1$ ,  $f_0 \sim q_0$ ,  $f_1 \sim q_1$ ; пространственную координату обозначим  $x$ . Эти переобозначения сделаны для того, чтобы подчеркнуть, во-первых, что задача разностной аппроксимации является новой независимой задачей, и, во-вторых, что аппроксимирующие функции будут ниже интерпретироваться как сеточные функции, отличающиеся от тех функций, которые фигурируют в уравнении. Запишем аппроксимирующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + \Sigma_0 \cdot w = f_0, \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{dw}{dx} + \Sigma_1 \cdot v = f_1. \end{cases} \quad (5.73)$$

Зададимся граничными условиями (5.46), (5.47) на свободных поверхностях

$$\begin{cases} w(x=0) + 2v(x=0) = 0, \\ w(x=H) - 2v(x=H) = 0. \end{cases} \quad (5.74)$$

Предполагается, что расчетная область (рис. 5.3) состоит из плоских однородных слоев, т.е.  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  в уравнениях (5.73) – кусочно-постоянные функции.

Покроем расчетную область сеткой узлов ( $x_i$ ) таким образом, чтобы узлы попадали на поверхности разрыва коэффициентов  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  уравнения (см. рис. 5.3). Задание расчетных узлов на поверхностях разрыва позволяет “автоматически учесть” условия непрерывности (5.45). Для получения конечно-разностных уравнений проинтегриру-

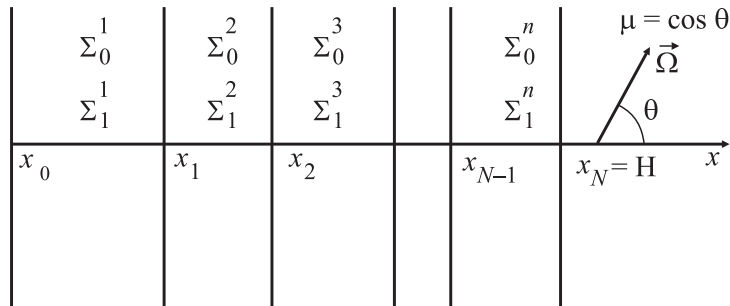


Рис. 5.3. Схема расчетной области

ем уравнения (5.73) по произвольному отрезку  $[x_{k-1}, x_k]$ . К интегралам в левой части уравнений применим квадратурную формулу Эйлера:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} u dx = \frac{u_{k-1} + u_k}{2} \Delta x_k + \frac{(\Delta x_k)^2}{12} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)_{k-1} - \left( \frac{du}{dx} \right)_k \right] + O((\Delta x)^5). \quad (5.75)$$

Эта формула позволит аппроксимировать уравнения (5.73) с повышенной точностью  $O((\Delta x)^5)$ , т.е. с учетом членов порядка  $(\Delta x)^4$ . Отметим, что обычно применяемая аппроксимация не учитывает членов с производными в (5.75), т.е. ее точность порядка  $O((\Delta x)^2)$ . Итак, для достаточно гладких функций получим

$$\begin{cases} v_k - v_{k-1} + \Sigma_0 \left[ \frac{\Delta x_k}{2} (w_k + w_{k-1}) + \frac{(\Delta x_k)^2}{12} \left( \left( \frac{dw}{dx} \right)_{k-1} - \left( \frac{dw}{dx} \right)_k \right) \right] = \bar{f}_0, \\ \frac{w_k - w_{k-1}}{3} + \Sigma_1 \left[ \frac{\Delta x_k}{2} (v_k + v_{k-1}) + \frac{(\Delta x_k)^2}{12} \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)_{k-1} - \left( \frac{dv}{dx} \right)_k \right) \right] = \bar{f}_1, \end{cases}$$

где  $\bar{f}_i = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_i dx, \quad i = 0, 1, \quad (5.76)$

– среднее значение моментов известной функции источника на интервале. Выразим производные из уравнений (5.73):

$$\left( \frac{dv}{dx} \right)_k = (f_0 - \Sigma_0 \cdot w)_k, \quad \left( \frac{dw}{dx} \right)_k = 3 \cdot (f_1 - \Sigma_1 \cdot v)_k \quad (5.77)$$

и подставим соответственно в уравнения (5.10):

$$\begin{cases} \Delta v_k + \Sigma_0 \left[ \frac{\Delta x_k}{2} (w_k + w_{k-1}) + \frac{(\Delta x_k)^2}{12} \cdot 3 \left( -\Delta f_{1k} + \Sigma_1 \Delta v_k \right) \right] = \bar{f}_0, \\ \frac{1}{3} \Delta w_k + \Sigma_1 \left[ \frac{\Delta x_k}{2} (v_k + v_{k-1}) + \frac{(\Delta x_k)^2}{12} \left( -\Delta f_{0k} + \Sigma_0 \Delta w_k \right) \right] = \bar{f}_1. \end{cases} \quad (5.78)$$

Выполнив необходимые тождественные преобразования, получим

$$\begin{cases} P \cdot \Delta v_k + \Sigma_0 \frac{\Delta x_k}{2} (w_k + w_{k-1}) = F_0, \\ \frac{1}{3} \cdot P \cdot \Delta w_k + \Sigma_1 \frac{\Delta x_k}{2} (v_k + v_{k-1}) = F_1, \end{cases} \quad (5.79)$$

### 5.11. Трехточечные разностные уравнения диффузионного типа

где  $k = 1, \dots, N-1$  (см. рис. 5.3);

$$P = 1 + \frac{\Sigma_0 \Sigma_1}{4} (\Delta x_k)^2, \quad F_0 = \bar{f}_0 + \frac{\Sigma_1 (\Delta x_k)^2}{12} \Delta f_{1k}, \quad F_1 = \bar{f}_1 + \frac{\Sigma_0 (\Delta x_k)^2}{12} \Delta f_{0k}.$$

Система двухточечных разностных уравнений (5.79) должна быть дополнена аппроксимацией граничных условий (5.74):

$$v_0 + \frac{1}{2} w_0 = 0; \quad v_N - \frac{1}{2} w_N = 0. \quad (5.80)$$

Уравнения (5.79), (5.80) образуют замкнутую систему, которую можно решить каким-либо численным методом. Но обычно из системы (5.79) исключают функцию  $v$  и получают трехточечное разностное уравнение диффузионного типа только для функции  $w$ , т.е. для плотности потока. Трехточечные разностные схемы обычно, при прочих равных условиях, устойчивее двухточечных.

### 5.11. Трехточечные разностные уравнения диффузионного типа

Эти уравнения могут быть получены непосредственно разностной аппроксимацией диффузионного уравнения

$$\nabla D \nabla \varphi - \Sigma_a \cdot \varphi + q = 0, \quad (5.81)$$

но поскольку двухточечные разностные уравнения повышенной точности (5.79), (5.80) уже получены, целесообразнее использовать в качестве “полуфабриката” их, а не уравнение (5.81). Из первого уравнения системы (5.79) выразим  $v_k$ :

$$v_k = v_{k-1} + \frac{F_0}{P} - \frac{\Sigma_0 \cdot \Delta x_k}{2P} (w_k + w_{k-1}), \quad (5.82)$$

а из второго уравнения той же системы выразим  $v_{k-1}$ :

$$v_{k-1} = \frac{F_1 - \frac{1}{3} P \cdot \Delta w_k}{\Sigma_1 \frac{\Delta x_k}{2}} - v_k. \quad (5.83)$$

Подставим  $v_{k-1}$  из (5.83) в (5.82):

$$v_k = \frac{F_1 - \frac{1}{3} P \cdot \Delta w_k}{\Sigma_1 \frac{\Delta x_k}{2}} + \frac{F_0}{P} - \frac{\Sigma_0 \cdot \Delta x_k}{2P} (w_k + w_{k-1}) - v_k \quad (5.84)$$

и получим отсюда выражение для  $v_k$ :

$$v_k = \frac{1}{2P} \left[ F_0 - \frac{\Sigma_0 \Delta x_k}{2} (w_k + w_{k-1}) \right] + \frac{1}{\Sigma_1 \Delta x_k} \left( F_1 - \frac{1}{3} P \cdot \Delta w_k \right). \quad (5.85)$$

Вернемся к (5.83) и подставим в него  $v_k$  из (5.85):

$$v_{k-1} = -\frac{1}{2P} \left[ F_0 - \frac{\Sigma_0 \Delta x_k}{2} (w_k + w_{k-1}) \right] + \frac{1}{\Sigma_1 \Delta x_k} \left( F_1 - \frac{1}{3} P \cdot \Delta w_k \right). \quad (5.86)$$

На данном этапе следует вспомнить, что расчетная область состоит из слоев с различными ядерно-физическими свойствами, т.е. значения  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$  и  $P$  зависят от номера слоя; величины же  $F_0$  и  $F_1$ , составленные из моментов источника и сечений, зависят, вообще говоря, от номера расчетного узла. Поэтому в общем случае необходимо величины  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $P$ ,  $F_0$  и  $F_1$  снабдить индексами, отражающими номер расчетного узла. Перепишем с учетом сказанного (5.86): дробный индекс “ $k - 1/2$ ” означает, что данная величина является средней на интервале  $[x_{k-1}, x_k]$  и условно “приписана” к середине интервала:

$$v_{k-1} = -\frac{1}{2P_{k-\frac{1}{2}}} \left[ F_{0_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\Sigma_{0_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k}{2} (w_k + w_{k-1}) \right] + \frac{1}{\Sigma_{1_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k} \left( F_{1_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} P_{k-\frac{1}{2}} \Delta w_k \right). \quad (5.87)$$

Перепишем также (5.85) для  $v_k$  через величины, определенные на интервале  $[x_{k-1}, x_k]$ :

$$v_k = \frac{1}{2P_{k-\frac{1}{2}}} \left[ F_{0_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\Sigma_{0_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k}{2} (w_k + w_{k-1}) \right] + \frac{1}{\Sigma_{1_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k} \left( F_{1_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} P_{k-\frac{1}{2}} \Delta w_k \right). \quad (5.88)$$

Индекс  $k$  номера узла изменяется от 0 до  $N$ . Перейдем в (5.88) к следующему узлу, т.е. изменим  $k \rightarrow k + 1$ :

$$v_k = -\frac{1}{2P_{k+\frac{1}{2}}} \left[ F_{0_{k+\frac{1}{2}}} - \frac{\Sigma_{0_{k+\frac{1}{2}}} \Delta x_{k+1}}{2} (w_{k+1} + w_k) \right] +$$

$$+\frac{1}{\Sigma_{1_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}}\left(F_{1_{k+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}P_{k+\frac{1}{2}}\Delta w_{k+1}\right). \quad (5.89)$$

Приравняем (5.88) и (5.89) для  $v_k$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2P_{k-\frac{1}{2}}}\left[F_{0_{k-\frac{1}{2}}}-\frac{\Sigma_{0_{k-\frac{1}{2}}}\Delta x_k}{2}(w_k+w_{k-1})\right]+ \\ & +\frac{1}{\Sigma_{1_{k-\frac{1}{2}}}\Delta x_k}\left(F_{1_{k-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}P_{k-\frac{1}{2}}\Delta w_k\right)= \\ & =-\frac{1}{2P_{k+\frac{1}{2}}}\left[F_{0_{k+\frac{1}{2}}}-\frac{\Sigma_{0_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}}{2}(w_{k+1}+w_k)\right]+ \\ & +\frac{1}{\Sigma_{1_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}}\left(F_{1_{k+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}P_{k+\frac{1}{2}}\Delta w_{k+1}\right). \end{aligned} \quad (5.90)$$

В (5.90) перегруппируем члены:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}\frac{P_{k+\frac{1}{2}}\Delta w_{k+1}}{\Sigma_{1_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}}+\frac{1}{3}\frac{P_{k-\frac{1}{2}}\Delta w_k}{\Sigma_{1_{k-\frac{1}{2}}}\Delta x_k}+\frac{\Sigma_{0_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}}{4P_{k+\frac{1}{2}}}(w_{k+1}+w_k)+ \\ & +\frac{\Sigma_{0_{k-\frac{1}{2}}}\Delta x_k}{4P_{k-\frac{1}{2}}}(w_k+w_{k-1})= \\ & =\frac{F_{1_{k-\frac{1}{2}}}}{\Sigma_{1_{k-\frac{1}{2}}}\Delta x_k}-\frac{F_{1_{k+\frac{1}{2}}}}{\Sigma_{1_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}}+\frac{F_{0_{k-\frac{1}{2}}}}{2P_{k-\frac{1}{2}}}+\frac{F_{0_{k+\frac{1}{2}}}}{2P_{k+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Обычная запись системы трехточечных уравнений:

$$-\alpha_k \cdot w_{k+1} + \beta_k \cdot w_k - \gamma_k \cdot w_{k-1} = \delta_k, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (5.92)$$

Сопоставив (5.92) и (5.91), получим коэффициенты уравнения (5.92):

$$\alpha_k = \frac{1}{3}\frac{P_{k+\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}} - \frac{\Sigma_{0_{k+\frac{1}{2}}}\Delta x_{k+1}}{4P_{k+\frac{1}{2}}};$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= \frac{1}{3} \frac{P_{k-\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1\frac{k-\frac{1}{2}}}} - \frac{\Sigma_{0\frac{k-\frac{1}{2}}}}{4P_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k; \\
 \beta_k &= \frac{1}{3} \frac{P_{k+\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1\frac{k+\frac{1}{2}}}} + \frac{\Sigma_{0\frac{k+\frac{1}{2}}}}{4P_{k+\frac{1}{2}}} \Delta x_{k+1} + \frac{1}{3} \frac{P_{k-\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1\frac{k-\frac{1}{2}}}} + \frac{\Sigma_{0\frac{k-\frac{1}{2}}}}{4P_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k; \\
 \delta_k &= \frac{F_{1\frac{k-\frac{1}{2}}}}{\Sigma_{1\frac{k-\frac{1}{2}}}} \Delta x_k - \frac{F_{1\frac{k+\frac{1}{2}}}}{\Sigma_{1\frac{k+\frac{1}{2}}}} \Delta x_{k+1} + \frac{F_{0\frac{k-\frac{1}{2}}}}{2P_{k-\frac{1}{2}}} + \frac{F_{0\frac{k+\frac{1}{2}}}}{2P_{k+\frac{1}{2}}}, \quad (5.93)
 \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, N-1$ . Обратимся к граничным условиям (5.80) при  $k = 1$ :

$$v_0 = -\frac{1}{2}w_0. \quad (5.94)$$

Из (5.87), положив  $k = 1$ , подставим  $v_0$  в (5.94):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2P_{1\frac{1}{2}}} \left[ F_{0\frac{1}{2}} - \frac{\Sigma_{0\frac{1}{2}}}{2} (w_1 + w_0) \right] + \\
 & + \frac{1}{\Sigma_{1\frac{1}{2}}} \Delta x_1 \left( F_{1\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} P_{1\frac{1}{2}} \Delta w_1 \right) = -\frac{1}{2}w_0. \quad (5.95)
 \end{aligned}$$

После “подгонки” (5.95) к виду (5.92) запишем коэффициенты уравнения (5.92) для точки на “левой” границе:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{1}{3} \frac{P_{1\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1\frac{1}{2}}} - \frac{\Sigma_{0\frac{1}{2}}}{4P_{1\frac{1}{2}}} \Delta x_0; \\
 \beta_0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{P_{1\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1\frac{1}{2}}} + \frac{\Sigma_{0\frac{1}{2}}}{4P_{1\frac{1}{2}}} \Delta x_0; \\
 \gamma_0 &= 0; \\
 \delta_0 &= -\frac{F_{1\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1\frac{1}{2}}} \Delta x_1 + \frac{F_{0\frac{1}{2}}}{2P_{1\frac{1}{2}}}. \quad (5.96)
 \end{aligned}$$

На “правой” границе условия (5.80) при  $k = N$  имеют вид

$$v_N = \frac{1}{2}w_N. \quad (5.97)$$

### 5.11. Трехточечные разностные уравнения диффузионного типа

Воспользовавшись (5.88) для  $v_k$  при  $k = N$ , перепишем (5.97):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w_N = \frac{1}{2P_{N-\frac{1}{2}}} \left[ F_{0_{N-\frac{1}{2}}} - \frac{\Sigma_{0_{N-\frac{1}{2}}}\Delta x_N}{2}(w_N - w_{N-1}) \right] + \\ + \frac{1}{\Sigma_{1_{N-\frac{1}{2}}}\Delta x_N} \left( F_{1_{N-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}P_{N-\frac{1}{2}}\Delta w_N \right). \end{aligned} \quad (5.98)$$

Выполнив знакомые уже преобразования, получим коэффициенты трехточечного уравнения для точки, лежащей на “правой” границе:

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 0; \\ \beta_N &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{P_{N-\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1_{N-\frac{1}{2}}}\Delta x_N} + \frac{\Sigma_{0_{N-\frac{1}{2}}}\Delta x_N}{4P_{N-\frac{1}{2}}}; \\ \gamma_N &= \frac{1}{3} \frac{P_{N-\frac{1}{2}}}{\Sigma_{1_{N-\frac{1}{2}}}\Delta x_N} - \frac{\Sigma_{0_{N-\frac{1}{2}}}\Delta x_N}{4P_{N-\frac{1}{2}}}; \\ \delta_0 &= -\frac{F_{1_{N-\frac{1}{2}}}}{\Sigma_{1_{N-\frac{1}{2}}}\Delta x_N} + \frac{F_{0_{N-\frac{1}{2}}}}{2P_{N-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Итак, расчет коэффициентов трехточечного уравнения окончен. Отметим, что при расчете коэффициентов для узлов, лежащих между поверхностями разрыва сечений (см. рис. 5.3), выражения несколько упрощаются, что позволяет экономить вычислительную работу. В частности, для узлов внутри слоя вычисление коэффициентов выполняется однократно:  $\alpha_k = \gamma_k = \text{const}$  (5.93).

Далее, все выражения для коэффициентов содержат особенность в знаменателе при  $\Sigma_1 = 0$ . Это означает, что составленный алгоритм будет потенциально содержать “авостную” (Авост=аварийный останов) ситуацию: при задании, например, вакуума в качестве слоя (все сечения равны нулю) алгоритм не будет выполнен (“деление на нуль”). Избежать “аварийной ситуации” в данном случае нетрудно тождественным преобразованием: необходимо обе части уравнения (5.92) умножить на одно и то же число, а именно на  $\Sigma_{1_{k-\frac{1}{2}}}\Sigma_{1_{k+\frac{1}{2}}} = \text{const}$  для каждого узла. Это означает умножение на указанное число всех коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ .

### 5.12. Решение уравнений методом “прогонки”

Систему уравнений

$$-\alpha_k \cdot w_{k+1} + \beta_k \cdot w_k - \gamma_k \cdot w_{k-1} = \delta_k, \quad \alpha_N = \gamma_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (5.100)$$

с коэффициентами, определяемыми (5.93), (5.96) и (5.99), будем решать методом “прогонки”. Прежде всего представим решение в очередном узле через решение в предшествующем узле таким образом:

$$w_k = E_k \cdot w_{k+1} + F_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.101)$$

Подставим (5.101) в уравнение (5.100) при  $k = 0$ :

$$-\alpha_0 \cdot w_1 + \beta_0 \cdot (E_0 \cdot w_1 + F_0) = \delta_0. \quad (5.102)$$

Приравняв в (5.102) коэффициенты при  $w_1$  и свободные члены, получим

$$E_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}; \quad F_0 = \frac{\delta_0}{\beta_0}. \quad (5.103)$$

Далее, (5.101) при  $k = k-1$ :  $w_{k-1} = E_{k-1} \cdot w_k + F_{k-1}$  тоже подставим в уравнение (5.100):

$$-\alpha_k \cdot w_{k+1} + \beta_k \cdot w_k - \gamma_k \cdot (E_{k-1} \cdot w_k + F_{k-1}) = \delta_k. \quad (5.104)$$

Выразив в (5.103)  $w_k$  через  $w_{k+1}$ , получим

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k - \gamma_k \cdot E_{k-1}} \cdot w_{k+1} + \frac{\delta_k + \gamma_k \cdot F_{k-1}}{\beta_k - \gamma_k \cdot E_{k-1}}. \quad (5.105)$$

Сопоставив (5.101) и (5.105), получим

$$E_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k - \gamma_k \cdot E_{k-1}}; \quad F_k = \frac{\delta_k + \gamma_k \cdot F_{k-1}}{\beta_k - \gamma_k \cdot E_{k-1}}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (5.106)$$

Итак, процесс решения разбивается на два этапа.

1. **Прямая прогонка** (расчет коэффициентов  $E_k$  и  $F_k$ ):

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\alpha_0}{\beta_0}; & F_0 &= \frac{\delta_0}{\beta_0}; & E_k &= \frac{\alpha_k}{\beta_k - \gamma_k \cdot E_{k-1}}; \\ F_k &= \frac{\delta_k + \gamma_k \cdot F_{k-1}}{\beta_k - \gamma_k \cdot E_{k-1}}, & 1 &\leq k \leq N. \end{aligned} \quad (5.107)$$



## 2. Обратная прогонка (расчет сеточной функции $w_k$ ):

$$w_N = F_N; \quad w_k = E_k \cdot w_{k+1} + F_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.108)$$

Задача расчета функции плотности потока решена. Если требуется наряду с функцией  $w$  знание функции плотности тока  $v$ , т.е. решение системы  $P_1$  - уравнений МСГ (5.44), (5.73), то в этом случае следует воспользоваться граничными условиями (5.94) и (5.97), а также (5.88) с уже полученными значениями сеточной функции  $w_k$ :

$$\begin{aligned} v_0 &= -\frac{1}{2}w_0; & v_N &= \frac{1}{2}w_N; \\ v_k &= \frac{1}{2P_{k-\frac{1}{2}}} \left[ F_{0_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{\Sigma_{0_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k (w_k + w_{k-1})}{2} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Sigma_{1_{k-\frac{1}{2}}} \Delta x_k} \left( F_{1_{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} P_{k-\frac{1}{2}} \Delta w_k \right), \quad k = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Описанный алгоритм решения  $P_1$  – уравнений МСГ реализован в известной отечественной программе приближенного решения уравнения переноса, которая называется REMP1. Эта серийная программа основана на методе “выведение+ $P_1$ ”. Аббревиатура REMP1 происходит от “**R**emoval+ $P_1$ ” - метод. Основные преимущества описанного алгоритма:

- а) разностная схема повышенной точности позволяет использовать более редкую сетку узлов;
- б) безытерационный метод решения разностных уравнений (“метод прогонки”) также приводит к значительной экономии вычислительной работы.

Все это обеспечивает высокое быстродействие программы REMP1.

В настоящее время используется достаточно много серийных программ, предназначенных для расчета характеристик полей излучений. Помимо программы REMP1 метод “выведение+ $P_1$ ” реализован в следующих отечественных серийных программах:

РАПИД – позволяет рассчитывать протяженную защиту с применением комплексных методик;

АТИКА – осуществляет расчет источников сложной формы, характеризуется развитым сервисом.

Из зарубежных программ, реализующих метод “выведение+ $P_1$ ”, отметим программу SABINA, которая также позволяет задавать внешние источники сложной формы.

На этом закончим рассмотрение метода сферических гармоник применительно к решению уравнения переноса. Остается только напомнить, что *МСГ* является исторически первым методом, примененным в задачах переноса реакторного излучения. В настоящее время широко распространены другие методы: методы дискретных ординат, метод Монте-Карло и т.п. Но *МСГ* продолжает, тем не менее, применяться для решения УП: в программах приближенного расчета прохождения излучений, основанных на комплексных методиках, в теоретических исследованиях, т.е. там, где преимущества *МСГ* (простота и малая трудоемкость низших  $P_1 \div P_3$  - приближений) могут быть эффективно использованы.

# ГЛАВА 6

## МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

### 6.1. Общие положения

Метод дискретных ординат (МДО) является в настоящее время основным методом численного решения уравнений переноса излучений. Он применяется в задачах атмосферной оптики, астрофизики, физики реакторов и т.п. Наиболее широкую область применения МДО составляют задачи радиационной защиты.

Различные варианты МДО реализованы в известных программах РОЗ, РАДУГА, КАСКАД, DOT, ANISN, PALLAS и др. С помощью этих программ ведутся массовые расчеты задач с одномерными геометрическими моделями, решается много важных задач для двумерных и отдельных трехмерных моделей.

Некоторые варианты МДО настолько отличаются друг от друга, что их следует различать скорее не как *варианты*, а как *методы* дискретных ординат. Эти методы претерпевают развитие, появляются их модификации; предпринимаются специальные методологические исследования по адаптации МДО к решению новых классов задач переноса и т.д. Всем этим проблемам посвящена обширная, в основном журнальная литература. Следует отметить, что удовлетворительной теории этого класса методов еще не создано, многие возникающие вопросы требуют дальнейших расчетно-теоретических исследований.

Обычно энергетическая зависимость в УП описывается при помощи группового подхода, при котором задача сводится к решению системы единообразных групповых уравнений. Поэтому с полным основанием можно считать, что все вычислительные трудности сосредоточены в решении группового УП. Без нарушения общности можно излагать основы МДО, опираясь на односкоростное уравнение переноса

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\Omega' + q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (6.1)$$

которое описывает распределение плотности фазового потока данной энергии  $\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega})$  в точках  $\vec{r}$  рассматриваемой области  $G$  по всем направлениям  $\vec{\Omega}$ . На внешней граничной поверхности  $\Gamma$  области  $G$  задаются

краевые условия, которые в общем виде записываются так:

$$\left. \varphi(\vec{r}_\Gamma, \vec{\Omega}) \right|_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} = q(\vec{r}_\Gamma, \vec{\Omega}) + \int_{\Gamma} d\vec{r}' \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0} R(\vec{r}'_\Gamma, \vec{\Omega}'; \vec{r}_\Gamma, \vec{\Omega}) \cdot \varphi(\vec{r}'_\Gamma, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'. \quad (6.2)$$

Эти условия определяют входящее в область  $G$  излучение, которое складывается из излучения внешних источников  $q(\vec{r}_\Gamma, \vec{\Omega})$  и излучения, отраженного средой, окружающей область  $G$ . В (6.2)  $\vec{n}$  – внешняя к поверхности  $\Gamma$  нормаль,  $R$  – коэффициент отражения излучения окружающей средой, зависящий от характеристик выходящего из  $G$  (при  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0$ ) излучения  $\varphi(\vec{r}_\Gamma, \vec{\Omega})$ . На поверхностях раздела зон  $G_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , составляющих область  $G$ , решение  $\varphi(\vec{r}_\Gamma, \vec{\Omega})$  предполагается непрерывным по  $\vec{r}$  в направлении  $\vec{\Omega}$ . Полное сечение  $\Sigma$ , сечение рассеяния  $\Sigma_s$  и индикатриса рассеяния обычно не зависят от  $\vec{r}$  в пределах зоны  $G$ ; функция источников  $Q$  в пределах  $G$  обладает достаточной гладкостью.

Метод дискретных ординат основан на сеточной аппроксимации краевой задачи (6.1), (6.2), т.е. на дискретном представлении пространственной и угловой зависимостей входящих в УП функций плотности потока, источника и индикатрисы рассеяния. В разделе о методе сферических гармоник описана разностная аппроксимация уравнений  $P_1$  - приближения МСГ по пространственной переменной; угловая же зависимость в МСГ представляется в виде ряда по сферическим функциям. В отличие от МСГ, в методах дискретных ординат угловая зависимость, так же как и пространственная, представляется дискретно.

Впервые МДО был применен в 40-х годах прошлого века Дж. Виком и С. Чандрасекаром для решения задач об однородных плоскопараллельных слоях, т.е. для простейших моделей переноса с изотропным рассеянием. В отсутствие источников условия облучения задаются граничными условиями:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \cdot \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu') d\mu'. \quad (6.3)$$

Введем обозначение  $\Sigma_s \cdot \varphi \equiv F$ . При реализации МДО было предложено заменить интеграл рассеяния в УП квадратурной суммой

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(\mu') d\mu' \cong \sum_{j=1}^N A_j \cdot F(\mu_j). \quad (6.4)$$

Здесь  $A_j$  и  $\mu_j$  – соответственно веса и узлы квадратурной формулы, причем

$$\sum_{j=1}^N A_j = 1, \quad -1 \leq \mu_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.3) должно быть решено, в соответствии с дискретным представлением, в узлах  $\mu_i$ , т.е. это уравнение заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (зависимость только от  $z$ , поэтому  $\partial/\partial z \rightarrow d/dz$ ):

$$\mu_i \frac{d\varphi(z, \mu_i)}{dz} + \Sigma \cdot \varphi(z, \mu_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N A_j \cdot F(\mu_j), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.6)$$

Для такой простой модели переноса при кусочно-постоянных коэффициентах  $\Sigma$  система (6.6) допускает аналитическое решение, общий вид которого следующий:

$$\varphi(z, \mu_i) = \sum_s B_{s,i} \cdot \exp(\gamma_s \cdot \Sigma \cdot z). \quad (6.7)$$

Величины  $B_{s,i}$  и  $\gamma_s$  получаются подстановкой (6.7) в (6.6) с учетом конкретных граничных условий и т.п. Анализ решений системы (6.6) представляет собой отдельную задачу, входившую в детали которой здесь не будем. Отметим, что даже незначительное усложнение модели переноса сразу же исключает возможность аналитического решения и приводит к необходимости применения численных методов. В частности, практически всегда применяется, наряду с дискретизацией по угловым переменным, дискретизация по пространственным переменным.

Если схема МДО применяется в общем случае, т.е. для дискретизации угловой зависимости плотности потока  $\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega})$  из УП общего вида (5.14), то интеграл рассеяния заменяется квадратурной суммой по формуле вида

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\psi' F(\mu', \psi') \cong \sum_{m=1}^M A_m \cdot F(\mu_m, \psi_m). \quad (6.8)$$

## 6.2. Особенности практических задач переноса излучения

Подстановка (6.8) в уравнение (6.1) и дискретизация по пространственным переменным приводят к весьма сложным и громоздким системам уравнений, требующим применения мощных современных алгоритмов решения. Значительные трудности в создании алгоритмов

и программ решения УП определяются следующими особенностями практических задач переноса излучений:

- сложная структура пространственной, энергетической и угловой зависимостей коэффициентов уравнения переноса  $\Sigma$ ,  $\Sigma_a$  и  $g$  ведет к сложной структуре решения;
- из-за больших размеров расчетной области диапазон изменения решения обычно очень велик: так, ослабление потоков в реальных защитах может составлять десять и более порядков;
- разнообразие потребностей широкого круга пользователей ведет к необходимости создания высокоуниверсальных алгоритмов и программ, обеспечивающих полноту, точность и эффективность обработки расчетной информации.

### 6.3. Основные требования к современному алгоритму МДО

Для больших вычислительных задач сложилась определенная система требований к численному алгоритму. Применительно к задачам переноса эти требования могут быть сформулированы следующим образом. Должны быть обеспечены:

- а) консервативность**, т.е. отражение в принятой аппроксимации УП законов сохранения ("соотношений баланса") частиц;
- б) устойчивость** (см. определение) расчетного алгоритма в практически используемом диапазоне шагов (это, например, величина  $\Delta x$  в (5.59) – (5.92));

#### Определение

*Будем называть алгоритм устойчивым, если малые изменения во входной информации не могут приводить, в результате исполнения алгоритма, к большим изменениям в выходной информации.*

- в) неотрицательность и монотонность** решения (см. определение).

#### Определение

*Функция  $f(x)$  называется монотонной на некотором интервале, если для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  интервала либо из  $x_1 < x_2$  всегда следует  $f(x_1) < f(x_2)$  (возрастающая функция), либо из  $x_1 > x_2$  всегда следует  $f(x_1) < f(x_2)$  (убывающая функция). Схема монотонна в достаточной степени, если сохраняет монотонность сеточной функции при разумной густоте сеток.*

Эти требования можно считать основными. Система требований (а)–(в) может быть дополнена менее “жесткими” и менее категорическими требованиями, которые создатели алгоритмов и программ все же всегда стремятся выполнить. Некоторые из этих требований-рекомендаций могут быть здесь указаны.

1. Арифметическая и логическая *простота* алгоритма расчета ячейки (это, например, один “ $k$ -й шаг” в алгоритме (5.59) – (5.92)). Простота и компактность элементарного алгоритма – “сердцевины” программы – позволяет относительно просто его модифицировать, заменять, отлаживать, исправлять и пр.
2. *Универсальность* вычислительной схемы, позволяющая с помощью данного алгоритма решать широкий круг разнообразных задач.

Поясним последнее требование простым примером. Диффузионное уравнение для одномерных областей может быть записано в таком виде:

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha \cdot D \frac{d\varphi}{dr} - \Sigma \cdot \varphi + q = 0, \quad (6.9)$$

$$\text{где} \quad \alpha = \begin{cases} 0 & \text{– для плоской геометрии,} \\ 1 & \text{– для цилиндрической геометрии,} \\ 2 & \text{– для сферической геометрии.} \end{cases}$$

Если в вычислительной схеме решения уравнения использовать именно эту общую запись, т.е. “протащить”  $\alpha$  в конечно-разностную схему и рассматривать как параметр, задаваемый “извне”, то и алгоритм, и программа решения диффузионного уравнения будут универсальны относительно геометрии задачи.

Последовательность перечисления требований к алгоритму (а) – (в) и (1), (2) примерно соответствует степени их важности. Введем еще два важных понятия, которые понадобятся в дальнейшем. Это понятия *положительности* и *линейности* разностных схем. Так, схема (5.92) – (5.93), аппроксимирующая уравнение диффузии, положительна и линейна. Она положительна при положительных источниках и при соблюдении условий  $\alpha \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta > \alpha + \gamma$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – коэффициенты трехточечной схемы:

$$-\alpha_k \varphi_{k+1} + \beta_k \varphi_k - \gamma_k \varphi_{k-1} = \delta_k. \quad (6.10)$$

#### Определение

Схема называется **положительной**, если она дает неотрицательное решение при неотрицательных источниках.

#### Определение

Схема называется **линейной**, если ее параметры не зависят от решения.

Если обратиться к формулам для коэффициентов (5.93), то можно убедиться, что они не зависят от решения, следовательно, схема (5.92) – (5.93) линейна. Если схема не является положительной, т.е. могут, например, для некоторых “ $k$ ” возникать отрицательные решения, применяется коррекция – пересчет коэффициентов схемы по алгоритмам, гарантирующим в данных условиях положительность. При этом схема чаще всего становится нелинейной.

При реализации схем МДО могут возникать и другие неприятности, в частности осцилляции решения и лучевые эффекты:

а) осцилляции возникают в областях с резко меняющимися градиентами решения, что характерно для переноса в неоднородных средах. При большом градиенте в решении может получиться значительный локальный выброс, который дальше распространяется (из-за балансности схем) в виде осцилляций (рис. 6.1). Эти осцилляции могут сильно

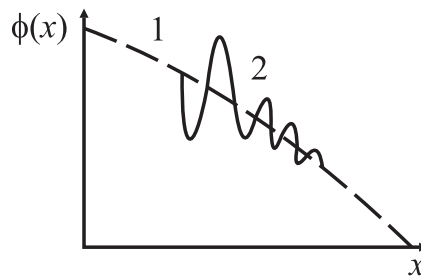


Рис. 6.1. Осцилляции в решении  $\phi(x)$ : 1 – выброс; 2 – осцилляции

искажать решение, причем в довольно больших по размеру областях. Самое очевидное средство борьбы с осцилляциями – сгущение сетки в области больших градиентов решения, там, где возникает выброс. К сожалению, сгущение сеток не всегда дает достаточный эффект. Полностью снимают проблему только схемы высокой степени монотонности;

б) лучевые эффекты (*ray-effects*) возникают в результате использования редкой угловой сетки в задачах с источниками, сосредоточенными в некотором объеме (т.е. не заполняющими равномерно всю расчетную область). Из сказанного выше (п.6.1) ясно, что алгоритм МДО состоит в расчете по направлениям. Так, в (6.8) это направление  $\vec{\Omega}_m$  задается парой углов  $\mu_m, \psi_m$ . Расчет выполняется для последовательности пространственных узлов, задаваемых пространственной сеткой. На рис. 6.2 условно обозначены три последовательных пространственных узла  $\vec{r}_{k-1}, \vec{r}_k$  и  $\vec{r}_{k+1}$ , из которых выходят лучи, задаваемые направлением  $\vec{\Omega}_m$ . При изображенных на рис. 6.2 узлах пространственной сетки и направлении угловой сетки  $\vec{\Omega}_m$  информация о сосредоточенном источнике  $G$  поступит только в узел  $\vec{r}_k$ , т.е. в узлы  $\vec{r}_{k-1}$  и



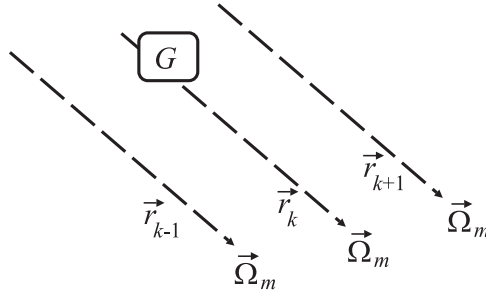


Рис. 6.2. Схема возникновения лучевого эффекта:  $\vec{r}_k$  – последовательные узлы пространственной сетки;  $\vec{\Omega}_m$  – рассматриваемое направление;  $G$  – сосредоточенный источник

$\vec{r}_{k+1}$  поступит искаженная информация, нарушающая баланс. Борьба с лучевыми эффектами состоит в правильном подборе угловых и пространственных сеток, причем положительный эффект не всегда может быть достигнут за счет простого сгущения сеток: необходим специальный анализ, для того чтобы выбрать угловые и пространственные сетки разумной размерности, хорошо видящие все сосредоточенные источники.

## 6.4. Геометрические модели

Итак, для практической реализации какого-либо варианта МДО необходимо введение пространственной и угловой координатных систем. Для пространственного описания расчетной области обычно используются прямоугольная декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат. В некоторых задачах используются и такие экзотические системы координат, как гексагональная, тороидальная и пр. Напомним, что выбор системы координат определяется симметрией задачи.

Как уже говорилось, основное затруднение при переходе от общего вида УП к уравнению в той или иной геометрии – определение вида оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$ . Выше получены частные виды оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$  для прямоугольной декартовой системы координат и для сферической системы (только для сферически-симметричной задачи). С помощью правил векторного анализа может быть получен явный вид оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$  для любых криволинейных систем координат. Здесь же приведем явный вид оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$  в трех системах координат: прямоугольной, цилиндрической и сферической. Этот оператор для задач, обладающих различной симметрией, приведен в таблице ниже, и эта симметрия передается аргументами функции плотности потока  $\phi(\cdot)$ .

Вид оператора  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$  в трех системах координат

Геометрия	Плотность потока	Оператор $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})$
Прямоугольная	$\varphi(z, \mu)$ $\varphi(x, y, z, \mu, \psi)$	$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ $\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}$
Цилиндрическая	$\varphi(r, z, \mu, \psi)$	$\frac{1}{r} \xi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi)}{\partial \psi}$
Сферическая	$\varphi(r, \mu)$	$\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial(r^2 \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial[(1 - \mu^2)\varphi]}{\partial \mu}$

$$\mu = \cos \theta; \quad \xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \cos \psi; \quad \eta = \sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin \psi.$$

На рис. 6.3 приведена декартова система координат и единичный вектор направления движения  $\vec{\Omega}$ . В декартовой системе координат вектор  $\vec{\Omega}$  записывается так:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \cdot \vec{i} + \Omega_y \cdot \vec{j} + \Omega_z \cdot \vec{k}. \quad (6.11)$$

Компоненты вектора  $\vec{\Omega}$ :

$$\begin{cases} \Omega_x = \sin \theta \cdot \cos \psi, \\ \Omega_y = \sin \theta \cdot \sin \psi, \\ \Omega_z = \cos \theta. \end{cases} \quad (6.12)$$

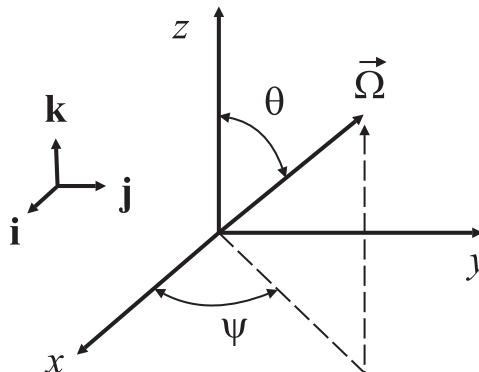


Рис. 6.3. Вектор  $\vec{\Omega}$  в декартовой системе координат

Данные таблицы, поясняемые рис. 6.3, позволяют записать УП в конкретной системе координат. Так, уравнение (6.3) записано для функции  $\varphi(z, \mu)$ , т.е. для плоскопараллельной геометрии и задачи с азимутальной симметрией: решение не зависит от угла  $\psi$  (см. рис. 6.3).

К настоящему времени создан целый ряд высокоэффективных программ для решения УП в одномерных геометриях с помощью тех или иных вариантов МДО. Дальнейшее развитие алгоритмов МДО в одномерных геометриях направлено на повышение быстродействия (за счет перехода к схемам высокого порядка точности, использования более эффективных итерационных методов и т.д.).

С повышением эффективности ЭВМ и развитием МДО происходит постепенный переход к более общим, двумерным и трехмерным геометрическим моделям.

В практических задачах область  $G$ , в которой исследуется перенос излучения, обычно является частью большой системы. Влиянием среды, окружающей область  $G$ , пренебрегают или учитывают приближенно – введением упрощенных законов отражения. Задачи об областях больших размеров разбиваются на последовательности задач для подобластей сравнительно простой структуры. Эти задачи связываются между собой краевыми условиями.

Для расчетных подобластей обычно используются одномерные и двумерные геометрические модели. Обоснование правильного выбора геометрической модели, достаточно точной, с одной стороны, и не слишком сложной, с другой стороны, требует специального исследования. Это исследование опирается на результаты пробных расчетов, на опыт и интуицию расчетчика. Как уже говорилось, свойства симметрии исходной задачи обычно позволяют снизить размерность геометрической модели.

## 6.5. Аппроксимация интеграла рассеяния

Общим для всех вариантов МДО является, как уже было указано в п.6.1, переход к дискретному описанию угловой зависимости. Для этого вводится квадратурная сетка  $(w_m, \vec{\Omega}_m)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , где  $w_m$  – вес направления  $\vec{\Omega}_m$ . Это направление может быть задано сферическими координатами  $(\theta_m, \psi_m)$  или направляющими косинусами  $(\xi_m, \eta_m, \mu_m)$ .

Обратимся к стационарному уравнению переноса для функции плотности фазового потока  $\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ . В МДО, как уже говорилось выше, интеграл рассеяния заменяется квадратурной суммой (запишем

интеграл в сферической системе координат):

$$\int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega' \rightarrow \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\psi' F(\mu', \psi'). \quad (6.13)$$

$$\int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\psi' F(\mu', \psi') \simeq \sum_{m=1}^M w_m \cdot F(\mu_m, \psi_m). \quad (6.14)$$

Если подынтегральная функция

$$F(\mu', \psi') \equiv F(\vec{\Omega}) \rightarrow \Sigma_s(\vec{r}) \cdot g(\vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \quad (6.15)$$

обладает определенной симметрией, то интегрирование в (6.14) может быть сведено к интегрированию по части сферы. В плоскопараллельных и сферически-симметричных задачах с азимутальной симметрией интегрирование в (6.14) сводится к однократному интегрированию по  $\mu$ , так как решение в этих задачах не зависит от азимутального угла  $\psi$  (см. рис. 6.1):

$$\int_{-1}^1 d\mu' F(\mu') \simeq \sum_{m=1}^M w_m \cdot F(\mu_m). \quad (6.16)$$

От выбора квадратуры, т.е. системы узлов “ $m$ ” и весов  $w_m$ , в большой степени зависит точность решения задачи в рамках МДО. В случае азимутальной симметрии задачи в качестве квадратуры (6.16) чаще всего выбираются квадратуры типа Гаусса, веса которых равны

$$w_k = \frac{2}{(1 - \xi_k^2)[P'_m(\xi_k)]^2}. \quad (6.17)$$

Здесь  $m$  значений аргумента  $\xi$  являются корнями полинома Лежандра  $P_m(\xi)$ , где  $P'_m \equiv \partial P_m / \partial \xi$ . Квадратуры Гаусса порядка  $M$  точно интегрируют полином  $(2M - 1)$ -й степени. Итак, узлы гауссовой квадратуры порядка  $M$  есть нули полинома Лежандра  $P_m$  степени  $M$ .

Для двумерных квадратур типа (6.14) обычно выбираются квадратуры с равномерным расположением узлов по поверхности сферы. Опишем кратко пример построения такой квадратуры, называемой  $ES_n$ -квadrатурой, и приведем формулы для весов и узлов этой квадратуры.

На рис.6.3 изображен единичный вектор  $\vec{\Omega}$  в прямоугольной и сферической системах координат. Сфера единичного радиуса, описываемая вектором  $\vec{\Omega}$ , разбивается на восемь октантов; опишем построение квадратуры для первого октанта:  $\psi \in [0, \pi/2]$ ;  $\mu \in [0, 1]$ .

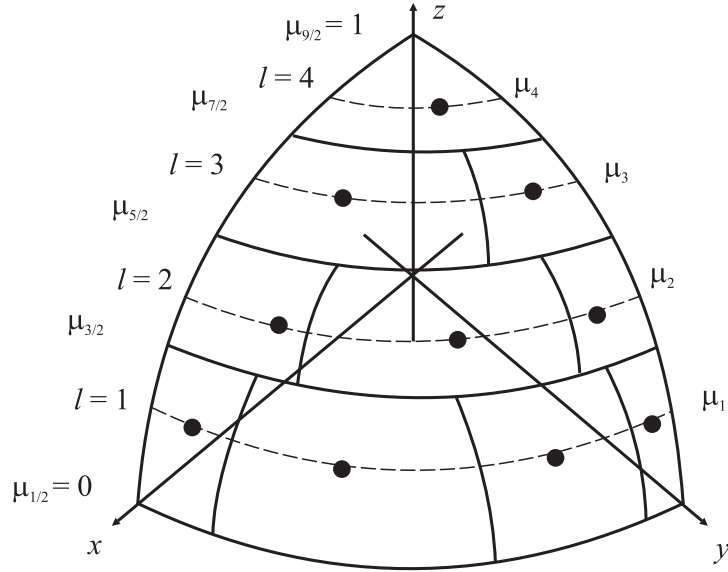


Рис. 6.4. Построение узлов  $ES_n$ -квadrатуры ( $n = 8$ ), равномерно расположенных на поверхности единичной сферы (первый октант)

Разобьем октант на рис. 6.4 на  $n \cdot (n + 2)/8$  частей одинаковой площади  $S_0$ , причем

$$S_0 = \frac{4\pi}{8} : \frac{n \cdot (n + 2)}{8} = \frac{4\pi}{n \cdot (n + 2)}. \quad (6.18)$$

Здесь  $n = 2, 4, 6, \dots$  – порядок квадратуры. Разбиение выполняем параллелями  $\mu = \mu_{l+\frac{1}{2}}$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, n/2$  и меридиональными дугами  $\psi = \psi_{l,m+\frac{1}{2}}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n/2 - l + 1$  так, чтобы 1-й слой по  $\mu$  состоял из  $n/2 - l + 1$  частей одинаковой площади  $S_0$ . Если  $w_l$  – ширина  $l$ -го слоя по  $\mu$ , то площадь  $l$ -го слоя  $S_l$  может быть вычислена интегрированием по поверхности единичной сферы таким образом:

$$S_l = \int_{\Delta S_1} dS = \int_{\Delta \mu} d\theta \sin \theta \int_0^{\pi/2} d\psi = -\frac{\pi}{2} \int_{\mu_{l+\frac{1}{2}}}^{\mu_{l-\frac{1}{2}}} d(\cos \theta) = \frac{\pi}{2} (\mu_{l+\frac{1}{2}} - \mu_{l-\frac{1}{2}}) = \frac{\pi}{2} w_l. \quad (6.19)$$

Напомним, что при вычислении интеграла угол  $\theta$  отсчитывается от положительного направления оси  $z$ . Веса квадратуры, или ширины  $l$ -го слоя  $w_l$ , вычисляются по формуле

$$w_l = \frac{4(n - 2l + 2)}{n(n + 2)}, \quad l = 1, 2, \dots, n/2; \quad \sum_{l=1}^{n/2} w_l = 1. \quad (6.20)$$

Координаты границ слоя  $\mu_{l-\frac{1}{2}}$  определяются по формуле

$$\mu_{l-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{(n-2l+2)(n-2l+4)}{n(n+2)}, \quad l = 1, 2, \dots, n/2, \quad (6.21)$$

а координаты середины слоя  $\bar{\mu}_l$ :

$$\bar{\mu}_l = \frac{\mu_{l-\frac{1}{2}} + \mu_{l+\frac{1}{2}}}{2} = 1 - \frac{(n-2l+2)^2}{n(n+2)}, \quad (6.22)$$

$$l = 1, 2, \dots, n/2.$$

Координаты  $\mu_l$  узлов квадратуры рассчитываются по формуле

$$\mu_l = \bar{\mu}_l + f \cdot \mu_{l-\frac{1}{2}}, \quad (6.23)$$

где параметр  $f$  определяется из условия

$$\sum_{l=1}^{n/2} w_l \cdot \mu_l^2 = \frac{1}{3}. \quad (6.24)$$

Координаты квадратурных узлов по азимутальному углу  $\psi_{l,m}$ , где  $l$  – номер слоя;  $m$  – номер сектора в слое (сектора нумеруются по возрастанию  $\psi$ ), определяются по формуле

$$\psi_{l,m} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2m-l}{n-2l+2} \cdot A_n + \frac{1}{2}(1-A_n) \right], \quad (6.25)$$

$$m = 1, 2, \dots, n/2 - l + 1.$$

Обычно принимают  $A = 1$ , но существуют и другие рекомендации, основанные на принципах сохранения, т.е. на точной передаче каких-либо интегралов.

Здесь представлено краткое описание  $ES_n$ -квадратуры для первого октанта. На остальные семь октантов квадратура распространяется тривиально, из условия симметрии квадратуры относительно отражений:  $\mu \rightarrow -\mu$ ;  $\psi \rightarrow -\psi$ ;  $\pi/2 - \psi \rightarrow \pi/2 + \psi$ . Если подынтегральная функция  $F(\cdot)$  в (6.14) обладает какой-либо симметрией, то квадратура строится для меньшего чем 8 количества октантов. Так, для плоскопараллельной задачи с азимутальной зависимостью может быть использована  $ES_n$ -квадратура, построенная для четырех октантов:  $\psi \in [0, \pi]$ ;  $\mu \in [-1, 1]$ . Для плоскопараллельной задачи без азимутальной зависимости можно использовать, наряду с квадратурой типа Гаусса (6.14),

и одномерную  $ES_n$  - квадратуру, узлы и веса которой на интервале  $[0, 1]$  определяются формулами (6.20) и (6.23), а для интервала  $[-1, 0]$  соответствующие узлы и веса находятся из условия симметрии квадратуры.

При решении УП в средах, состоящих из материалов с резко различающимися ядерно-физическими свойствами, особенно если в среде есть сосредоточенные источники, используются составные квадратуры: поверхность единичной сферы разбивается на подобласти, в каждой из которых применяется своя квадратура. Ориентированные угловые сетки составной квадратуры позволяют сэкономить вычислительные затраты и, что существеннее, избежать “лучевых эффектов” (см. рис. 6.2), выбрав в соответствующих подобластях сетку достаточной густоты.

## 6.6. Метод характеристик (метод Владимирова)

Рассмотрим простейшую реализацию одного из вариантов МДО – метода характеристик (МХ) (метод Владимирова) – в плоскопараллельной геометрии для задачи с азимутальной симметрией. Односкоростное УП в плоскопараллельной геометрии для задач с азимутальной симметрией имеет такой вид (см. (5.17)):

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \cdot \varphi = \Sigma_s \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}(z, \mu, \mu') \cdot \varphi(z, \mu') d\mu' + q(z, \mu). \quad (6.26)$$

Пусть плоскопараллельные слои помещены в вакуум, причем “слева” (рис. 6.5) на барьер падают нейтроны источника, т.е. на поверхности  $z = 0$  задано граничное условие внешнего облучения (см. (6.2)):

$$\varphi(z = 0, \mu) = f(\mu) \quad \text{для } \mu > 0. \quad (6.27)$$

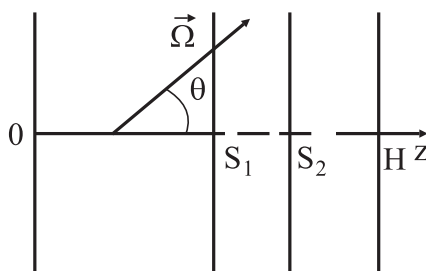


Рис. 6.5. Плоскопараллельная задача для УП

На “правой” граничной поверхности задано условие отсутствия входящего извне излучения:

$$\varphi(z = H, \mu) = 0 \quad \text{для } \mu < 0. \quad (6.28)$$

Уравнение (6.26) может быть упрощенно записано таким образом:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = S(z, \mu) + q(z, \mu). \quad (6.29)$$

Применение МДО к уравнению (6.29) означает переход к дискретному по угловой переменной представлению и к системе уравнений для функций  $\varphi_m(z) \equiv \varphi(z, \mu_m)$ , т.е. для плотностей потоков в направлениях  $\vec{\Omega}_m$ , составляющих углы  $\theta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  с осью  $z$ ,  $\mu_m = \cos \theta_m$ . Запишем эту систему уравнений:

$$\mu_m \frac{\partial \varphi_m(z)}{\partial z} + \Sigma(z) \varphi_m(z) = S_m(z) + q_m(z), \quad (6.30)$$

где  $S_m(z) \equiv S(z, \mu_m)$ ;  $q_m(z) \equiv q(z, \mu_m)$  – интеграл рассеяния и источник при дискретном, пусть и фиксированном значении  $\mu_m$ . К этой системе необходимо добавить граничные условия внешнего облучения (6.27), также записанные для дискретных значений  $\mu_m$ :

$$\varphi_m(z = 0) = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, M_1, \quad (6.31)$$

где  $M_1$  – количество положительных значений  $\mu_m$ , а также граничные условия отсутствия облучения на поверхности  $H$ :

$$\varphi_m(z = H) = 0, \quad m = M_1 + 1, \dots, M. \quad (6.32)$$

Введем разностную сетку по переменной  $z$  (рис. 6.6), устроенную таким образом, чтобы границы зон (т.е. поверхности  $S_1$  на рис. 6.5) совпали с какими-либо целыми значениями узлов. При реализации схемы МХ будем считать, что правая часть уравнения (6.29) и соответственно правая часть уравнения для дискретного значения (6.30) – известные функции. Для функции источника это очевидно,  $q(\cdot)$  не зависит от решения. Для интеграла рассеяния это не так,  $S(\cdot)$  зависит от решения  $\varphi(\cdot)$ . Тем не менее при получении уравнений МХ примем, что вся

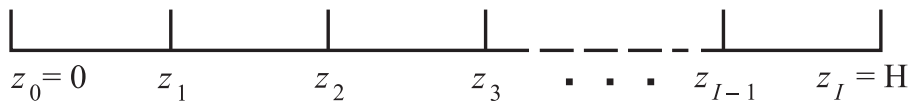


Рис. 6.6. Разностная сетка по переменной  $z$  для МХ



правая часть  $S(\cdot) + q(\cdot)$  известна. Итерационный способ решения уравнений  $MX$ , описанный ниже, позволит учесть зависимость интеграла рассеяния от решения. Проинтегрируем уравнение (6.30), записанное таким образом:

$$\mu_m \frac{d\varphi_m(z)}{dz} + \Sigma(z) \cdot \varphi_m(z) = F_m(z), \quad (6.33)$$

$$F_m(z) \equiv S_m(z) + q_m(z).$$

Интегрирование ведем вдоль характеристики  $\mu_m$  на интервале  $[z_i, z_{i+1}]$ , опуская индекс “ $m$ ”. Запишем интегралы в явном виде:

$$\begin{cases} \varphi_{i+1} = \varphi_i \cdot \exp(-\Sigma \cdot \Delta z / \mu) + \frac{1}{\mu} \int_{z_i}^{z_{i+1}} F(z) \exp(-\Sigma \cdot (z_{i+1} - \xi) / \mu) d\xi, & \mu > 0, \\ \varphi_i = \varphi_{i+1} \cdot \exp(-\Sigma \cdot \Delta z / |\mu|) + \frac{1}{|\mu|} \int_{z_i}^{z_{i+1}} F(z) \exp(-\Sigma \cdot (\xi - z_i) / |\mu|) d\xi, & \mu < 0, \end{cases} \quad (6.34)$$

где  $\Delta z \equiv (z_{i+1} - z_i)$  – шаг разностной сетки. Обычно предполагается, что подынтегральная функция  $F(z)$  линейна на шаге  $\Delta z$  и возможна интерполяция между узлами. Применим, например, параболическую интерполяционную формулу Лагранжа

$$F(z \in [z_{i+1} - z_i]) = \frac{z - z_i}{\Delta z} \cdot F_{i+1} + \frac{z_{i+1} - z}{\Delta z} \cdot F_i. \quad (6.35)$$

Если представление (6.35) подставить в интегралы (6.34), то в результате получим расчетные формулы для схемы  $MX$ :

$$\begin{aligned} \varphi^+ = \varphi^- \cdot \exp\left(-\frac{\Sigma \cdot \Delta z}{\mu}\right) + \frac{F^-}{\Sigma} \cdot \left[ -\exp\left(-\frac{\Sigma \cdot \Delta z}{\mu}\right) + \right. \\ \left. + \frac{|\mu|}{\Sigma \cdot \Delta z} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\Sigma \cdot \Delta z}{\mu}\right)\right) \right] + \\ + \frac{F^+}{\Sigma} \cdot \left[ 1 - \frac{|\mu|}{\Sigma \cdot \Delta z} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\Sigma \cdot \Delta z}{\mu}\right)\right) \right], \end{aligned} \quad (6.36)$$

где для компактности записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi^+ = \begin{cases} \varphi_{i+1}, & \mu > 0, \\ \varphi_i, & \mu < 0, \end{cases} \quad \varphi^- = \begin{cases} \varphi_i, & \mu > 0, \\ \varphi_{i+1}, & \mu < 0, \end{cases} \\ F^+ = \begin{cases} F_{i+1}, & \mu > 0, \\ F_i, & \mu < 0, \end{cases} \quad F^- = \begin{cases} F_i, & \mu > 0, \\ F_{i+1}, & \mu < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Итак, двухточечная разностная схема  $MX$  получена.

### 6.7. $S_n$ -метод (метод Карлсона)

Вторым основным вариантом МДО является  $S_n$ -метод (метод Карлсона). Рассмотрим его реализацию для той же задачи в плоскопараллельной геометрии с азимутальной симметрией. Как и для МХ, исходным уравнением для  $S_n$ -метода является уравнение (6.33). Однако разностная аппроксимация дифференциального оператора в  $S_n$ -методе существенно иная.

Введем разностную сетку по переменной  $z$  (рис. 6.7), устроенную таким образом, чтобы границы зон (т.е. поверхности  $S_i$  на рис. 6.5) совпали с какими-либо полуцелыми значениями узлов, а целые точки

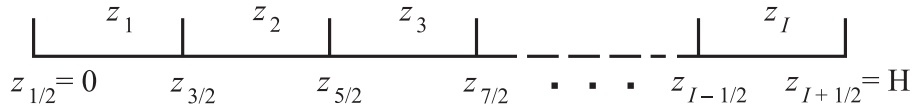


Рис. 6.7. Разностная сетка по переменной  $z$  для  $S_n$ -метода

$z_i$  совпали с центрами интервалов  $[z_{i-\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}]$ . Проинтегрируем уравнение (6.33) по  $z$  на интервале  $[z_{i-\frac{1}{2}}, z_{i+\frac{1}{2}}]$ :

$$|\mu| \cdot (\varphi_m^+ - \varphi_m^-) + \Sigma \cdot V_i \varphi_{i,m} \cdot F_{i,m}; \quad (6.38)$$

$$\varphi_m^+ = \begin{cases} \varphi_{i+\frac{1}{2}}, & \mu_m > 0, \\ \varphi_{i-\frac{1}{2}}, & \mu_m < 0, \end{cases} \quad \varphi_m^- = \begin{cases} \varphi_{i-\frac{1}{2}}, & \mu_m > 0, \\ \varphi_{i+\frac{1}{2}}, & \mu_m < 0, \end{cases} \quad (6.39)$$

$$V_i = \Delta z_i = z_{i+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}}.$$

Выражения  $\varphi_{i,m}$  и  $F_{i,m}$  – средние значения плотности потока и источника в ячейке соответственно:

$$\varphi_{i,m} = \frac{1}{V_i} \cdot \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} \varphi_m(z) dz; \quad F_{i,m} = \frac{1}{V_i} \cdot \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} F_m(z) dz. \quad (6.40)$$

Уравнение (6.38) – точное уравнение баланса. Для его определенности необходимо дополнительное соотношение, связывающее  $\varphi^+$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi^-$ . Это соотношение выбирается из соображений аппроксимации и устойчивости. Обычно принимают такую связь  $\varphi^+$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi^-$  (далее целые индексы опускаются как малоинформативные в данном контексте):

$$\varphi^+ = (1 + p) \cdot \varphi - p \cdot \varphi^-, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (6.41)$$

В зависимости от значений  $p$  получаются различные варианты разностной схемы:

- а)  $p = 1$  – “алмазная” схема; б)  $0 < p < 1$  – “взвешенная” схема; в)  $p = 0$  – “шаговая” схема.

Используя (6.38) и (6.41), выразим  $\varphi^+$  и среднее значение плотности потока в ячейке  $\varphi$  через  $\varphi^-$ :

$$\varphi = \frac{|\mu| \cdot (1 + p) \cdot \varphi^- + V \cdot F}{|\mu| \cdot (1 + p) + \Sigma \cdot V}, \quad (6.42)$$

$$\varphi^+ = \frac{[|\mu| \cdot (1 + p) - p \cdot \Sigma \cdot V] \cdot \varphi^- + (1 + p) \cdot V \cdot F}{|\mu| \cdot (1 + p) + \Sigma \cdot V}. \quad (6.43)$$

Следует отметить, что схема  $S_n$ -метода, в отличие от разностной схемы метода характеристик, является трехточечной ( $\varphi^-$ ,  $\varphi$  и  $\varphi^+$ ) и балансной.

Связь  $\varphi^-$ ,  $\varphi$  и  $\varphi^+$  в виде (6.41) не является единственно возможной. Если предположить, что в пределах ячейки плотность потока ведет себя экспоненциально, т.е.  $\varphi \sim a \cdot \exp(\delta z)$ , дополнительное соотношение связи выглядит так:

$$\varphi = \sqrt{\varphi^+ \cdot \varphi^-}. \quad (6.44)$$

Используя (6.38) и (6.44), получим

$$\varphi = \frac{2\varphi^- \cdot (|\mu| \cdot \varphi^- + V \cdot F)}{\Sigma \cdot V \varphi^- + \sqrt{(\Sigma \cdot V \cdot \varphi^-)^2 + 4|\mu| \cdot \varphi^- \cdot (|\mu| \cdot \varphi^- + V \cdot F)}}, \quad (6.45)$$

$$\varphi^+ = \frac{\varphi^2}{\varphi^-}. \quad (6.46)$$

Выражения (6.44) – (6.46) дают формулы метода среднего геометрического или экспоненциального метода.

Ясно, что при положительных источниках  $F > 0$  и  $\varphi > 0$  схема экспоненциального метода положительна, т.е. при счете не может возникнуть отрицательное значение плотности потока. То же можно сказать и о шаговой схеме. При расчете по алмазной схеме отрицательные значения плотности потока могут возникать при определенных соотношениях величины шага, источника и сечения. Алгоритм расчета ячейки может быть, например, таким: если на очередном шаге в расчете по алмазной схеме обнаружилось, что значение плотности потока отрицательно, происходит возврат на шаг назад и расчет данной ячейки повторяется по заведомо положительной шаговой схеме; далее расчет идет снова по алмазной схеме.

## 6.8. Итерационное решение разностных уравнений МДО

Обратимся к уравнениям (6.30) – (6.32). В результате применения к этим уравнениям МХ и  $S_n$  - метода получены формулы, выражающие “последующие” значения  $\phi$  через “предыдущие” (см. (6.36), (6.42), (6.43), (6.45), (6.46)). Итерационный алгоритм решения уравнений может быть построен, например, нижеследующим образом.

1. В уравнении (6.30) положить нулевое приближение интеграла рассеяния таковым:  $S_m^{(0)} \equiv 0, m = 1, \dots, M$ .

2. “Привязавшись” к граничным условиям (6.31), осуществить расчет функции  $\phi^{(0)}$  для  $\nu_m > 0, m = 1, \dots, M_1$  (рис. 6.8). Этот расчет в обеих

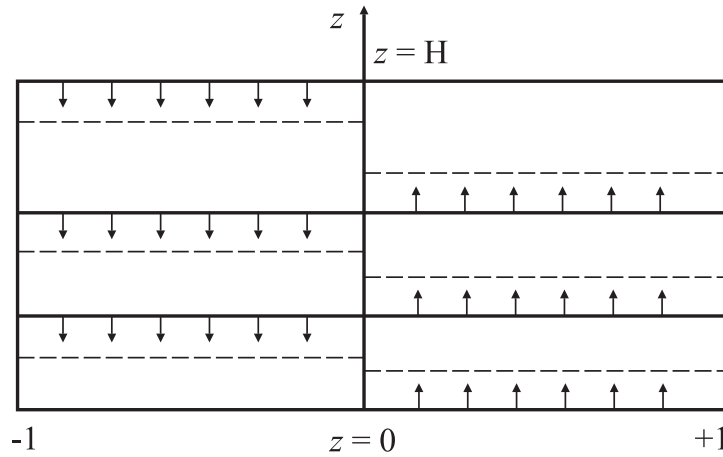


Рис. 6.8. Схема последовательности расчета функции плотности потока методом дискретных ординат

схемах осуществляется нижеследующим образом.

2<sup>а</sup>). Для схемы МХ воспользуемся (6.34) для  $\mu > 0$ , причем на первом шаге формула для вычисления такова:

$$\phi_{1,m}^{(0)} = f_m \cdot \exp((- \Sigma \cdot \Delta z) / \mu_m) + \frac{1}{\mu_m} \cdot \int_{z_0}^{z_1} q_m(\xi) \cdot \exp(-(z_1 - \xi) \cdot \Sigma / \mu_m) d\xi, \quad (6.47)$$

где  $f_m$  – интенсивность внешнего облучения из граничных условий (6.31). Вычисления выполняются для всех  $\mu_m > 0, m = 1, 2, \dots, M_1$ . На рис 6.8 этот шаг соответствует переходу с горизонтали  $z = 0$ ; в правой части рисунка для  $\mu > 0$ .

Переход к следующему узлу по  $z$  осуществляется по формуле

$$\varphi_{2,m}^{(0)} = \varphi_{1,m}^{(0)} \cdot \exp [(-\Sigma \cdot \Delta z) / \mu_m] + \frac{1}{\mu_m} \cdot \int_{z_1}^{z_2} q_m(\xi) \cdot \exp (-(z_1 - \xi) \cdot \Sigma / \mu_m) d\xi \quad (6.48)$$

и так далее, пока не будут вычислены значения  $\varphi_{k,m}^{(0)}$  во всех узлах сетки в правой части рисунка.

2<sup>b</sup>). Для схемы  $S_n$ -метода следует использовать (6.42) и (6.43) для среднего значения потока по ячейке  $\varphi$  и значения  $\varphi^+$  соответственно. С учетом граничных условий для первого шага запишем:

$$\varphi_{1,m}^{(0)} = \frac{\mu_m \cdot (1 + p) \cdot f_m + V_1 \cdot F_{1,m}}{\mu_m \cdot (1 + p) + \Sigma \cdot V_1}, \quad (6.49)$$

$$\varphi_{1,m}^{+(0)} = \frac{[\mu_m \cdot (1 + p) - p \cdot \Sigma \cdot V_1] \cdot f_m + (1 + p) \cdot V_1 \cdot F_{1,m}}{\mu_m \cdot (1 + p) + \Sigma \cdot V_1}, \quad (6.50)$$

$$\text{причем } V_1 = z_{3/2} - z_{1/2}; \quad F_{1,m} = \frac{1}{V_1} \cdot \int_{z_{3/2}}^{z_{1/2}} q_m(\xi) d\xi,$$

так как на нулевой итерации по источнику интеграл рассеяния положен равным нулю. В формулах (6.49) и (6.50) обычно принимают  $p = 1$ , т.е. ведут расчет по алмазной схеме. Если вдруг оказывается, что  $\varphi^+ < 0$ , то данный шаг пересчитывается по шаговой схеме с  $p = 0$  (именно для этого вычисляется среднее по ячейке  $\varphi$ , см. (6.41)).

При переходе к следующему пространственному узлу используют следующие формулы:

$$\varphi_{2,m}^{(0)} = \frac{\mu_m \cdot (1 + p) \cdot \varphi_{1,m}^{(0)} + V_2 \cdot F_{2,m}}{\mu_m \cdot (1 + p) + \Sigma \cdot V_2}, \quad (6.51)$$

$$\varphi_{2,m}^{+(0)} = \frac{[\mu_m \cdot (1 + p) - p \cdot \Sigma \cdot V_2] \cdot \varphi_{1,m}^{(0)} + (1 + p) \cdot V_2 \cdot F_{2,m}}{\mu_m \cdot (1 + p) + \Sigma \cdot V_2}, \quad (6.52)$$

$$\text{причем } m = 1, 2, \dots, M_1; \quad V_2 = z_{5/2} - z_{3/2}; \quad F_{2,m} = \frac{1}{V_2} \cdot \int_{z_{5/2}}^{z_{3/2}} q_m(\xi) d\xi.$$

Далее процесс продолжается до заполнения всех значений  $\varphi_{k,m}$  в правой части рис. 6.8. Если на каком-либо шаге алмазная схема дает

отрицательное значение  $\varphi^+$ , происходит пересчет данной ячейки по шаговой схеме, которая заведомо положительна.

3. “Привязавшись” к условиям (6.32), фиксирующим отсутствие облучения поверхности  $z = H$  “извне”, осуществим расчет функции  $\varphi$  для  $\mu_m < 0$ ,  $m = M_1 + 1, \dots, M$ . Расчет осуществляется “сверху вниз” на левой половине рис. 6.8 по тем же формулам, но интерпретируемым для  $\mu < 0$ . Рассмотрим для примера первый шаг по схеме МХ. Воспользовавшись второй формулой из (6.34) для расчета функции в предпоследнем “ $I - 1$ ” - м узле (см. рис. 6.6) и тем, что в силу отсутствия внешнего облучения  $\varphi_{m,i} \equiv \varphi_{m,I} = 0$ , получим

$$\varphi_{m,I-1}^{(0)} = \frac{1}{|\mu_m|} \cdot \int_{z_{I-1}}^{z_I} q_m(\xi) \cdot \exp(-(\xi - z_{I-1}) \cdot \Sigma/|\mu_m|) d\xi. \quad (6.53)$$

4. Получив “нулевое” приближение плотности потока  $\varphi^{(0)}$ , можно вычислить “нулевое” приближение интеграла рассеяния  $S^0(\cdot)$ :

$$S^{(0)}(z, \mu) = \Sigma_s \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}(z, \mu, \mu') \cdot \varphi^{(0)}(z, \mu') d\mu', \quad (6.54)$$

или, в дискретных значениях  $\mu_m$ :

$$S_m^{(0)}(z) = \Sigma_s \cdot \sum_{m'=1}^M w_{m'} \cdot C_{m,m'} \cdot \varphi_{m'}^{(0)}(z). \quad (6.55)$$

Формула (6.55) не до конца “правильная”: следует иметь в виду, что  $\varphi$  – сеточная функция и по  $\mu$  и по  $z$ , т.е.  $\varphi_{i,m}$ . В (6.55)  $w_m$  – веса квадратурной формулы, а  $C_{m,m'}$  – матрица рассеяния, связанная с интегрированной по  $\psi$  индикатрисой рассеяния:

$$C_{m,m'}(z) = \bar{g}(z, \mu_m, \mu_{m'}) \equiv \int_0^{2\pi} d\psi' g(z, \mu_0^{m,m'}), \quad (6.56)$$

$$\text{где } \mu_0^{m,m'} = \mu_m \cdot \mu_{m'} + \sqrt{(1 - \mu_m^2) \cdot (1 - (\mu_{m'}')^2) \cdot \cos \psi - \psi'},$$

т.е. индикатриса интегрируется по азимутальному углу  $\psi$  для дискретных по  $\mu$  значений.

5. Итак, уточнен источник  $F_m^{(0)}(z) = S_m^{(0)}(z) + q_m(z)$ . Повторив вычисления, описанные в пп. 2–3, получим первое приближение сеточной функции плотности потока  $\varphi_{k,m}^{(1)}$ . Далее пересчитываем интеграл

рассеяния и получаем  $S_m^{(1)}(z)$  и т.д. Критерий прекращения итераций может быть, например, таким: “ $n+1$ ”-я итерация не выполняется, если для “ $n$ ”-й итерации

$$\max_{k,m} \frac{|\varphi_{k,m}^{(n)} - \varphi_{k,m}^{(n-1)}|}{\varphi_{k,m}^{(n)}} < \varepsilon, \quad (6.57)$$

где  $\varepsilon$  – заданное малое число, определяющее точность расчета.

В случае медленной сходимости метода Владимирова,  $S_n$ -метода или любого другого, основанного на итерационном принципе, приходится прибегать к приемам ускорения сходимости. Один из таких приемов называется *балансным методом ускорения сходимости*. Балансный метод характеризуется простотой и глубоким физическим содержанием. Он применяется как при решении односкоростных задач, так и в проблемах многоскоростной теории.

Рассмотрим вышеописанный сходящийся итерационный процесс, который коротко может быть записан в операторной форме

$$\hat{A}\varphi^{(n)} = \hat{B}\varphi^{(n-1)} + Q. \quad (6.58)$$

Здесь

$$Q \equiv q/\Sigma; \quad (6.59)$$

$$\hat{A}\varphi \equiv \frac{1}{\Sigma} \vec{\Omega} \nabla \varphi + \varphi; \quad (6.60)$$

$$\hat{B}\varphi \equiv \int g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\Omega'. \quad (6.61)$$

Предположим, что в уравнении подставлено решение, в результате чего получено тождество. Умножим это тождество скалярно на некоторую функцию  $p(\vec{r}, \vec{\Omega}) > 0$ :

$$([\hat{A} - \hat{B}]\varphi, p) = (Q, p). \quad (6.62)$$

Если итерационный процесс (6.58) при данном  $n$  еще нельзя оборвать (разность  $|\varphi^{(n-1)} - \varphi^{(n)}|$ ) заметно отличается от нуля), то на рассматриваемом итерационном этапе функция  $\varphi^{(n)}$ , вообще говоря, не удовлетворяет равенству (6.62), так как она в этом случае подчиняется другому соотношению:

$$([\hat{A} - \hat{B}]\varphi, p) = (Q, p) + (\hat{B}[\varphi^{(n-1)} - \varphi^{(n)}], p). \quad (6.63)$$

Из последней формулы видно, что требуемое равенство (6.62) заведомо удовлетворяется только при  $n \rightarrow \infty$ . Для ускорения сходимости

полученную функцию  $\varphi^{(n)}$  умножают на некоторую константу  $C_n$ , подобранную таким образом, чтобы функция  $C_n \cdot \varphi^{(n)}$  удовлетворяла тождеству (6.62). В итоге приходим к следующему модифицированному процессу:

$$A\tilde{\varphi}^{(n)} = B\varphi^{(n-1)} + Q; \quad \varphi^{(n)} = C_n \cdot \tilde{\varphi}^{(n)}, \quad (6.64)$$

где  $\tilde{\varphi}^{(n)}$  следует рассматривать как некоторый промежуточный результат, а константа

$$C_n = \frac{(Q, p)}{([\hat{A} - \hat{B}]\tilde{\varphi}^{(n)}, p)}. \quad (6.65)$$

В полученной формуле  $(Q, p) \neq 0$ , так как  $p > 0$ , а функция источников  $Q$  неотрицательна и не равна тождественно нулю. Следовательно, константа  $C_n \neq 0$ . Хотя доказательство сходимости предложенного модифицированного процесса в общем случае не получено, практическое применение алгоритма (6.64) в ряде случаев весьма эффективно.

Описанные схемы  $MX$  и  $S_n$ -метода реализованы в современной отечественной программе РОЗ-6, позволяющей получать решение уравнения переноса не только в плоскопараллельной  $(z, \mu)$  геометрии, но и в одномерных сферической  $(r, \mu)$  и цилиндрической  $(r, \mu, \psi)$  геометриях.

Из других отечественных серийных компьютерных программ отметим программы РАДУГА и КАСКАД.

РАДУГА – основная отечественная программа для двумерных расчетов, представляющая собой целое семейство компьютерных кодов с широкими функциональными возможностями.

КАСКАД – новая быстродействующая программа для двумерных расчетов, использующая эффективные алгоритмические схемы.

Из зарубежных компьютерных программ, реализующих метод дискретных ординат, отметим две программы:

ANISN – реализует одномерную расчетную схему по изложенной выше расчетной схеме и характеризуется развитым сервисом и универсальными файлами;

DOT – основная зарубежная программа для двумерных расчетов по методу дискретных ординат.



## ГЛАВА 7

### МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло (ММК) (метод статистических испытаний) зародился в середине прошлого века в США в ходе работы по созданию атомного оружия. Его применение стало возможным благодаря появлению первых электронно-вычислительных машин.

#### 7.1. Основы метода ММК

Моделирование различных “случайных” величин на ЭВМ основано на использовании датчика случайных чисел. Так называются подпрограммы, которые в качестве выходного параметра выдают значение  $s_i$  случайного числа  $s$ , равномерно распределенного на интервале  $[0,1]$ . Для вычисления  $s_i$  используют какую-либо рекуррентную формулу, например умножение по модулю  $M$  предыдущего значения последовательности  $n_{i-1}$  на заданную константу  $L$ :

$$n_i = L \cdot n_{i-1} \pmod{M}; \quad (7.1)$$

$$s_i = n_i/M, \quad (7.2)$$

где  $L$  и  $M$  – некоторые большие числа, например  $L = 5^{17}$  и  $M = 2^{40}$ . Числа  $s_i$  при этом не являются, строго говоря, случайными и поэтому в теории ММК называются псевдослучайными. Использование их в расчете обеспечивает возобновляемость результатов при повторных расчетах одной и той же задачи, что очень полезно при отладке программ. Качество псевдослучайных чисел, то есть их равномерность, обязательно проверяют с помощью специальных тестов.

Имея одно или несколько случайных чисел, равномерно распределенных на интервале  $[0,1]$ , можно построить алгоритм моделирования (розыгрыша, выбора) случайной величины  $\xi$  с произвольной функцией распределения  $F(x)$  (рис. 7.1). Сложность алгоритма розыгрыша зависит от вида функции  $F(x)$ . Рассмотрим несколько простых примеров.

**Метод обратных функций.** Для непрерывных случайных величин с простой функцией распределения применим метод обратных функций, который состоит в том, что записывается уравнение

$$F(\xi) = s, \quad s \in [0,1], \quad (7.3)$$

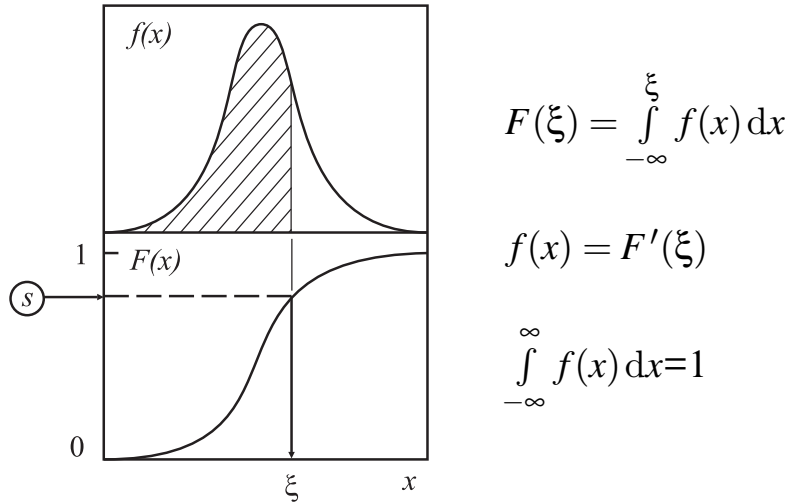


Рис. 7.1. Пояснение к алгоритму моделирования:  $F(x)$  – кумулятивная функция распределения и  $f(x)$  – плотность распределения для случайной величины  $\xi$

которое разрешается относительно  $\xi$ , если это возможно:

$$\xi = F^{-1}(s). \quad (7.4)$$

Это и есть общий вид моделирующей формулы для выбранного значения случайной величины  $\xi$ .

Например, для показательного распределения

$$F(x) = 1 - \exp(-\Sigma \cdot x), \quad x \geq 0 \quad (7.5)$$

решение соответствующего уравнения

$$1 - \exp(-\Sigma \cdot \xi) = s \quad (7.6)$$

дает известную моделирующую формулу

$$\xi = -\frac{1}{\Sigma} \cdot \ln(1 - s) = -\frac{1}{\Sigma} \cdot \ln s. \quad (7.7)$$

Здесь учтена эквивалентность случайных величин  $(1 - s)$  и  $s$  по отношению к формуле моделирования.

**Метод отбора** (метод исключений). Это более универсальный метод отбора или исключения. Пусть плотность распределения  $f(x)$  случайной величины  $\xi$  имеет сложный для моделирования вид и пусть также существует некоторая мажорирующая функция  $g(x)$ , такая, что

$f(x) \leq g(x)$ , и для нормированной плотности которой известен алгоритм моделирования случайной величины  $\eta$ . Частным случаем является  $g(x) = \text{const} = \max(f(x))$ . Тогда алгоритм моделирования может быть следующий.

Выбираем значение  $\eta_i$  по нормированной плотности

$$\frac{g(x)}{\int g(x) dx}. \quad (7.8)$$

Для очередного случайного числа  $s_i$ , равномерно распределенного на интервале  $[0,1]$ , проверяем условие: если  $s_i \cdot g(\eta_i) < f(\eta_i)$ , то есть значение  $s_i \cdot g(\eta_i)$  лежит ниже кривой  $f(x)$ , то полагаем  $\xi_i = \eta_i$ , иначе – выбранное значение  $\eta_i$  отбрасываем, и процесс повторяется.

**Метод суперпозиции** относится к к плотности распределения  $f(x)$ , которую можно представить в виде суперпозиции плотностей  $f_i(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n p_i f_i(x), \quad \text{где } \sum_{k=1}^n p_i = 1. \quad (7.9)$$

Он состоит в том, что сначала пропорционально вероятностям  $p_1$  выбирается одна из плотностей  $f_i$ , входящих в сумму, а затем из нее осуществляется розыгрыш значения  $\xi$ .

## 7.2. Вычисление интегралов

Применение метода Монте-Карло для вычисления интегралов основано на том, что практически любой интеграл можно представить как математическое ожидание некоторой случайной величины. Пусть, например, необходимо оценить интеграл

$$J = \int_X g(x) dx \quad (7.10)$$

по мере Лебега в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $X$ . Умножим и разделим подынтегральное выражение на некоторую плотность распределения  $f(x)$   $n$ -мерной случайной величины  $\xi$  и введем обозначение

$$q(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad \text{тогда} \quad (7.11)$$

$$J = \int_X f(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)} dx = \int_X f(x) \cdot q(x) dx = M[q(\xi)]. \quad (7.12)$$

Очевидно, что интеграл, стоящий справа, по определению является  $M[q(\xi)]$  – математическим ожиданием функции  $q(\xi)$ . Значение математического ожидания  $M[q(\xi)]$  можно вычислить как среднеарифметическое значение. Действительно, если мы теперь разыграем  $N$  значений  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  случайной величины  $\xi$  по плотности  $f(x)$  и вычислим для них значения функции  $q(\xi_i)$ , то среднеарифметическое этих значений

$$J_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N q(\xi_k) \quad (7.13)$$

будет оценкой интеграла  $J$  по результатам  $N$  испытаний. Согласно закону больших чисел,  $J_N \rightarrow J$  при  $N \rightarrow \infty$  по вероятности. А согласно центральной предельной теореме, истинное значение интеграла  $J$  с вероятностью

$$p(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\beta}^{+\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (7.14)$$

лежит в доверительном интервале  $J_N \pm \beta \cdot \sigma_N$ , где  $\sigma_N = \sigma/\sqrt{N}$  – средне-квадратическая погрешность оценки  $J_N$ ;  $\sigma = \sqrt{D[q(\xi)]}$  – стандартное отклонение, а  $D[q(\xi)] = \sum (q(\xi_i) - J_N)^2$  – дисперсия.

Важным достоинством ММК является возможность оценки погрешности  $\sigma_N$  по результатам моделирования. В качестве  $\beta$  обычно используют значения  $\beta=1, 2, 3$ , которым соответствуют значения вероятностей  $p(\beta)$ : 0.68, 0.95, 0.997. Это означает, что с вероятностью 0.68 значение  $J$  лежит в интервале  $J_N \pm \sigma_N$ , с вероятностью 0.95 – внутри интервала  $J_N \pm 2\sigma_N$  и с вероятностью 0.997 – внутри интервала  $J_N \pm 3\sigma_N$ .

Из выражения для погрешности следует, что сходимость метода Монте-Карло имеет порядок  $1/\sqrt{N}$ , то есть для того, чтобы повысить точность в два раза, число испытаний надо увеличить в четыре раза. При этом зависимость погрешности от  $N$  не чувствительна к виду подынтегральной функции и, что особенно ценно, не зависит от кратности интеграла. Поэтому метод Монте-Карло является основным методом для вычисления интегралов большой размерности.

В качестве примера рассмотрим определенный интеграл

$$J = \int_a^b g(x) dx \quad (7.15)$$

от непрерывной функции  $g(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Частным случаем плотности распределения  $f(x)$  является равномерная плотность:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad x \in [a, b], \quad (7.16)$$

для которой интеграл  $J$  выражается в виде

$$J = \int_X f(x) \frac{g(x)}{f(x)} dx = \int_X f(x) \frac{g(x)}{1/(b-a)} dx = (b-a) \cdot M[g(\xi)]. \quad (7.17)$$

Нетрудно заметить, что полученное выражение соответствует известной из математического анализа теореме о среднем. Оценка вычисления интеграла по (7.17) равна

$$J_N = \frac{(b-a)}{N} \sum_{k=1}^N g(\xi_k), \quad (7.18)$$

где  $\xi_k$  – равномерно распределенные на отрезке  $[a, b]$  случайные числа.

Еще одним способом оценки интеграла является бросание точек на плоскости равномерно по площади прямоугольника, накрывающего область под кривой  $g(x)$ , и вычисление доли точек, лежащих внутри этой области. Отметим, что такой способ является универсальным способом вычисления объемов произвольных трехмерных тел.

### **7.3. ММК в задачах переноса излучения**

Рассмотрим задачу переноса излучения с источником, общую постановку которой можно сформулировать следующим образом. Во-первых, имеется источник излучения с известными пространственными, энергетическими и угловыми распределениями испускаемых частиц. Во-вторых, заданы свойства среды, то есть описаны ее геометрия и химический состав материалов, из которых состоит среда. И наконец, заданы искомые характеристики излучения, то есть определены геометрия области детектирования и вид оцениваемого результата. При этом источник может быть локализован в какой-либо части среды или распределен по всей среде (геометрически может изменяться от точки до размеров всей среды). Аналогично и размеры области детектирования могут варьироваться от малых размеров до размеров всей среды.

Любая математическая модель явления строится при некоторых предположениях. В теории переноса нейтронов они следующие:

- нейтрон между столкновениями движется прямолинейно и с постоянной скоростью;
- для нейтрона, движущегося с определенной скоростью в однородной среде, вероятность столкновения на единице длины постоянна;
- изменение направления и скорости движения нейтрона происходит при столкновении с атомными ядрами;
- вторичные нейтроны рождаются в той же точке пространства, где произошло столкновение;
- взаимное столкновение нейтронов отсутствует.

Существует два различных подхода к использованию метода Монте-Карло в теории переноса излучения:

1) моделирование физических процессов распространения излучения в среде и накоплении некоторой статистической информации об искомых величинах без привлечения математического аппарата теории переноса;

2) метод формального математического решения уравнения переноса излучения, при котором решение представляется в виде ряда Неймана и далее этот ряд суммируется при помощи метода Монте-Карло.

В данном разделе мы сосредоточим внимание на втором подходе, а именно – на использовании метода Монте-Карло для решения уравнений переноса. Продемонстрируем технологию ММК на примере стационарного уравнения Пайерлса.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_V \left( \Sigma_s \cdot \varphi(\vec{r}') + q(\vec{r}') \right) \cdot \frac{\exp(-\Sigma \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} d\vec{r}'. \quad (7.19)$$

Перепишем уравнение (7.19) в виде суммы двух интегралов.

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) = \int_V \left[ \frac{\Sigma_s \cdot \exp(-\Sigma \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|)}{4\pi \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|^2} \right] \cdot \varphi(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ + \int_V \left[ \frac{\exp(-\Sigma \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|)}{4\pi \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|^2} \right] \cdot q(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Первый интеграл (7.20) можно трактовать как интегральное преобразование с известным ядром  $k(\vec{r}, \vec{r}')$ :

$$k(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\Sigma_s \cdot \exp(-\Sigma \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|)}{4\pi \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|^2}. \quad (7.21)$$

Второй интеграл (7.20) представляет собой интегральную функцию  $f(\vec{r})$  от известной функции источника  $q(\vec{r})$ :

$$f(\vec{r}) = \int_V \left[ \frac{\exp(-\Sigma \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|)}{4\pi \cdot |\vec{r}' - \vec{r}|^2} \right] \cdot q(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (7.22)$$

С учетом введенных обозначений перепишем уравнение (7.20) в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V k(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varphi(\vec{r}') d\vec{r}' + f(\vec{r}). \quad (7.23)$$

В операторной форме это уравнение выглядит следующим образом:

$$\varphi = \hat{K}\varphi + f. \quad (7.24)$$

В п. 4.4 была приведен итерационный алгоритм решения стационарного уравнения Пайерлса. Перепишем этот алгоритм в операторной форме с учетом новых обозначений. Общая формула итерационного процесса

$$\varphi^{(i)} = \hat{K}\varphi^{(i-1)} + f, \quad (7.25)$$

где  $i$  – номер итерации. Схема итерационного процесса выглядит следующим образом. Отметим, что функция в правой части нулевой итерации может быть, вообще говоря, произвольной стартовой функцией  $\varphi_0(\vec{r})$ . Выбор  $\varphi_0(\vec{r}) = f$  удобен с точки зрения последующей систематизации и обобщения итерационной схемы.

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(\vec{r}) &= \hat{K}\varphi_0(\vec{r}) &= f, \\ \varphi^{(1)}(\vec{r}) &= \hat{K}\varphi^{(0)}(\vec{r}) + f &= \hat{K}f + f, \\ \varphi^{(2)}(\vec{r}) &= \hat{K}\varphi^{(1)}(\vec{r}) + f &= \hat{K}^2f + \hat{K}f + f, \\ &\dots &\dots \\ \varphi^{(i)}(\vec{r}) &= \hat{K}\varphi^{(i-1)}(\vec{r}) + f &= \hat{K}^i f + \hat{K}^{i-1} f + \dots + \hat{K}f + f. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Последовательные приближения  $\varphi^{(i)}(\vec{r})$  сходятся при  $t \rightarrow \infty$  к решению  $\varphi(\vec{r})$  уравнения тогда и только тогда, когда это решение представимо в виде ряда Неймана

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{K}^i f(\vec{r}). \quad (7.27)$$

Члены ряда Неймана представляют собой кратные интегралы. При-

ведем в явном виде несколько первых членов ряда Неймана.

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(\vec{r}) &= \int_V k(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varphi_0(\vec{r}') d\vec{r}' + f(\vec{r}); \\ \varphi^{(2)}(\vec{r}) &= \int_V k(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varphi^{(1)}(\vec{r}') d\vec{r}' + f(\vec{r}) = \\ &= \int_V \int_V k(\vec{r}, \vec{r}') \cdot k(\vec{r}', \vec{r}'') \cdot f(\vec{r}'') d\vec{r}'' d\vec{r}' + \int_V k(\vec{r}, \vec{r}') \cdot f(\vec{r}') d\vec{r}' + f(\vec{r}).\end{aligned}\quad (7.28)$$

Интегралы высокой степени кратности можно вычислить только по методу Монте-Карло. Выше уже было отмечено, что технология вычисления кратных интегралов по методу Монте-Карло не зависит от кратности этих интегралов.

Обобщим рассмотрение уравнения переноса. В общем случае это уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Ему соответствует однородная марковская цепь событий с заданной переходной плотностью, которая зависит от элементарных процессов взаимодействия излучения с веществом, а начальное распределение – от источника излучения. Все это определяет аналоговый процесс случайных блужданий частицы. Для обсуждения этого процесса введем новые понятия.

Траектория – это звено марковской цепи. Для ее определения напомним, что интегральное уравнение переноса в общем случае зависит от семи независимых переменных. В  $n$ -мерном фазовом пространстве области  $G$  зададим  $n$ -мерную точку  $Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \in G$ . Обозначим  $Q_0$  начальную точку движения частицы в  $n$ -мерном пространстве. Тогда

$$T_i = (Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow Q_i) -$$

это траектория в области  $G$  блуждания частицы от начальной точки  $Q_0$  до точки  $Q_i$ . Плотность вероятности перехода между двумя соседними точками  $Q_{i-1}$  и  $Q_i$  траектории в фазовом пространстве описывается функцией  $p(Q_{i-1}, Q_i)$ . Ядро оператора этого перехода обозначим  $\hat{K}(Q_{i-1}, Q_i)$ . В этих обозначениях определим весовые коэффициенты  $W_j$ , функции от траектории

$$\hat{W}_j = \frac{\hat{K}(Q_0, Q_1) \cdot \hat{K}(Q_1, Q_2) \cdot \dots \cdot \hat{K}(Q_{j-1}, Q_j)}{p(Q_0, Q_1) \cdot p(Q_1, Q_2) \cdot \dots \cdot p(Q_{j-1}, Q_j)}, \quad j = 1 \dots i. \quad (7.29)$$

Легко заметить, что при  $\hat{W}_0 = 1$  имеет место рекуррентное соотношение для коэффициентов  $W_j$ :

$$\hat{W}_j = \frac{\hat{K}(Q_{j-1}, Q_j)}{p(Q_{j-1}, Q_j)} \cdot \hat{W}_{j-1}. \quad (7.30)$$



В задачах переноса излучения интерес, как правило, представляет не само решение уравнения переноса, а некоторые линейные функционалы  $J$  от него следующего вида:

$$J = \langle \phi, \Psi \rangle = \int_G \phi(Q) \cdot \Psi(Q) dG, \quad (7.31)$$

где интегрирование ведется по области  $G$  фазового пространства, а  $\Psi(Q)$  – функция связи, определяющая тип функционала. Для функции  $\Psi(Q)$  определим случайную величину, зависящую от траектории

$$\xi(\Psi) = \left[ \frac{\Psi(Q_0)}{p(Q_0)} \right] \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \hat{W}_i \cdot f(Q_i), \quad (7.32)$$

где  $p(Q_0)$  – плотность вероятности для появления частицы в начальной точке  $Q_0$  траектории;  $f$  – интегральное преобразование (7.22) от известной функции источника. В теории метода Монте-Карло доказывается, что для набора из  $N$  траекторий, где  $s$  – номер траектории, имеет место соотношение

$$\langle \phi, \Psi \rangle = M[\xi(\Psi)] \cong \frac{1}{N} \cdot \sum_{s=1}^N \xi(\Psi)_s. \quad (7.33)$$

Для расчета линейного функционала требуется моделировать различные траектории. Метод Монте-Карло — наглядный метод расчета переноса излучения. Программа моделирует большое число независимых траекторий частиц. Моделирование каждой траектории начинается с розыгрыша  $Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \in G$  частицы источника и продолжается моделированием отдельных звеньев траектории, объединенных в цепь Маркова. Моделирование звена траектории включает в себя:

- розыгрыш длины свободного пробега;
- определение расстояния до границы области;
- фиксирование пересечения границы области;
- фиксирование столкновения частицы;
- розыгрыш типа взаимодействия при столкновении;
- розыгрыш параметров вторичной частицы;
- фиксирование результата в детекторе.

В заключение сформулируем преимущества метода Монте-Карло.

1. Отказ от упрощающих приближений. Достоверность результатов определяется точностью теоретического описания и экспериментальных данных о взаимодействии частиц с веществом.

2. Слабая зависимость трудоемкости расчета и требуемого объема оперативной памяти от размера задачи: моделирование траекторий частиц изначально ведется в трехмерном пространстве.

3. Простота организации параллельных вычислений, причем с коэффициентом распараллеливания, близким к единице, т.к. траектории моделируются независимо друг от друга.

Метод Монте-Карло реализован во многих серийных компьютерных программах. Из отечественных разработок отметим компьютерные программы МСУ и ПРИЗМА.

МСУ – это российская универсальная программа расчёта потоков частиц методом Монте-Карло.

ПРИЗМА – это универсальная программа для решения линейных задач переноса излучения методом Монте-Карло, которая обеспечивает моделирование раздельного и совместного переноса нейтронов, фотонов, электронов, позитронов и ионов на основе спектрометрических данных о взаимодействии частиц с веществом в одно- двух- и трехмерной геометрии. Серийная программа ПРИЗМА обеспечивает расчет для следующих диапазонов энергий частиц:

$10^{-4}$  эВ – 150 МэВ (нейтроны);  
1 кэВ – 100 МэВ (фотоны);  
10 кэВ – 100 МэВ (электроны и позитроны);  
100 эВ – 300 МэВ (ионы).

Из зарубежных разработок наиболее популярной остается программа MCNP (**M**onte **C**arlo **N**-**P**article Transport Code), которая предназначена для моделирования протекания ядерных процессов с использованием методов Монте-Карло. Программа MCNP была разработана более 30 лет назад в Лос-Аламосской национальной лаборатории США на языке программирования фортран. В настоящее время программа способна моделировать также взаимодействие с участием нейтронов, фотонов и электронов, а не только реакции ядерного распада, для которых она первоначально разрабатывалась.

Программа MCNP версии 5 поддерживает платформы IRIX, DEC Alpha, AIX, SPARC, x86 (GNU/Linux и Microsoft Windows). В настоящее время в Лос-Аламосе развивается также программа MCNPX, являющаяся сочетанием транспортного кода MCNP с программой ЛАНЕТ, предварительно моделирующей расщепление ядер мишени под действием протонов и легких ядер. Обе программы позволяют судить о степени критичности ядерной системы.

## ГЛАВА 8

### МНОГОСКОРОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

В разделе 3 было получено кинетическое УП в односкоростном приближении. На односкоростной модели были продемонстрированы методы решения УП. Действительно, все приемы разностной аппроксимации УП и решения разностных аналогов вполне могут быть показаны на односкоростном УП. Но при анализе практических задач переноса излучений энергетической зависимостью параметров и решения УД пренебречь невозможно. Все методы решения УП, описанные выше, естественно, пригодны и для решения УП с энергетической зависимостью в том случае, если эта зависимость представлена в “групповом приближении” (см. п. 8.2).

Энергетическая переменная в задачах переноса не менее существенна, чем пространственные и угловые переменные. Дело в том, что характеристики взаимодействия нейтронов с ядрами (сечения) имеют сложную, специфическую и трудно учитываемую в расчетах зависимость от скорости (энергии) нейтрона.

#### 8.1. Уравнение с энергетической зависимостью

Получим УП в предположении, что рассеяние нейтрона, изменяя направление его движения, изменяет (уменьшает) и его скорость. Такая модель вполне оправдана: реакция упругого рассеяния нейтронов, например, однозначно связывает изменение направления движения и изменение величины скорости.

Прежде всего необходимо расширить понятие функции фазовой плотности нейтронов, дополнив список ее аргументов еще одним – скоростью. Пусть  $F(\Delta V, \Delta v, \Delta \Omega, t)$  – количество нейтронов в объеме  $\Delta V$  около некоторой точки  $\vec{r}$ , абсолютные значения скоростей которых заключены в интервале  $(v, v + \Delta v)$ , а направления скоростей – в интервале  $\Delta \Omega$  около некоторого направления  $\vec{\Omega}$ ; все это зафиксировано в момент времени  $t$ . Очевидно, что функция  $F(.)$  аддитивна относительно области  $\Delta G = (\Delta V, \Delta v, \Delta \Omega)$ . Производная функции  $F(.)$  по области  $\Delta G$  называется *фазовой плотностью нейтронов*:

$$\lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{F(\Delta V, \Delta v, \Delta \Omega, t)}{|\Delta V \cdot \Delta v \cdot \Delta \Omega|} = n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t). \quad (8.1)$$

Обобщим следующие основные понятия, ранее полученные в односкоростном приближении:

- а) *плотность фазового потока нейтронов* по определению  $\varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) \equiv v \cdot n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)$ ;
- б) *пучок нейтронов*  $(\Delta v \Delta \Omega)_{v, \vec{\Omega}}$  – это совокупность нейтронов, направления движения которых заключены в телесном угле  $\Delta \Omega$  около направления  $\vec{\Omega}$ , а абсолютные значения скоростей заключены в интервале  $\delta v$  около значения  $v$ .

Составим элементарный баланс нейтронов пучка  $(\Delta v \Delta \Omega)_{v, \vec{\Omega}}$  для некоторого произвольного, но *конечного* объема  $v$ , “погруженного” в область  $V_0$ , заполненную нейтронами. Баланс составляется для *малого* промежутка времени  $\Delta t$ . Ограничение на одинаковую скорость для нейтронов снимается, остальные ограничения, введенные при получении односкоростного УП, остаются.

1. Нейтроны не взаимодействуют между собой.
2. Квантовыми свойствами, частиц пренебрегаем.

Ограничение 1 определяется тем, что плотности нейтронов и ядер несоизмеримы  $((10^{12} \div 10^{19}) \ll 10^{24})$ . Из ограничения 1, в частности, следует линейность уравнения переноса.

Ограничение 2 означает, что при выводе УП эффекты, связанные с поляризацией нейтронов за счет спин-орбитального взаимодействия, не учитываются вследствие их пренебрежимо малого влияния.

Итак, при заданном поле  $n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)$  приращение количества нейтронов пучка  $(\Delta v \Delta \Omega)_{v, \vec{\Omega}}$  в объеме  $V$  за промежуток  $\Delta t$  можно представить в виде

$$\Delta N_v = \Delta \Omega \cdot \Delta v \int_V \left[ n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t + \Delta t) - n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) \right] dV. \quad (8.2)$$

Это изменение обуславливают:

- 
- |  |   |
|--|---|
| <p><u>1. Прибыль нейтронов:</u></p> <p>1.1. “работа” источников;</p> <p>1.2. переход из других пучков;</p> <p>1.3. деления ядер.</p> | <p><u>2. Убыль нейтронов:</u></p> <p>2.1. поглощение;</p> <p>2.2. рассеяния из пучка;</p> <p>2.3. механическое перемещение.</p> |
|--|---|
-

Рассмотрим последовательно компоненты баланса.

### 1. Расчет прибыли нейтронов

1.1. Если  $q(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)$  есть фазовая плотность источников, то соответствующий вклад  $\Delta N_q$  в пучок за промежуток времени  $\Delta t$

$$\Delta N_q = \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta \Omega} d\Omega \int_{\Delta v} dv \int_V q(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) V dV = \Delta \Omega \cdot \Delta v \cdot \Delta t \int_V q(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) dV. \quad (8.3)$$

При вычислении вклада трижды применена теорема о среднем в силу малости интервалов  $\delta t$ ,  $\Delta \Omega$  и  $\Delta v$ . Кстати, теорема о среднем, без упоминания, была дважды применена и при получении (8.2). Далее теорема о среднем будет применяться “автоматически”, т.е. без упоминания.

1.2. Вычисление прибыли  $\Delta N_{v, \Omega}$  за счет перехода из других пучков  $(\Delta v' \Delta \Omega')_{v', \vec{\Omega}'}$  требует описания механизма перехода при рассеянии.

Рассмотрим вероятность того, что нейтрон, имеющий до рассеяния скорость  $\vec{v}'$ , в результате рассеяния изменит скорость по направлению и абсолютной величине и попадет в пучок  $(\Delta v \Delta \Omega)_{v, \vec{\Omega}}$ . Вероятность попадания в наш пучок зависит не от каждого из векторов направления в отдельности, а от угла между ними, т.е. от скалярного произведения  $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$ . Далее, эта вероятность  $P_s$  зависит от величины “карманов”  $\Delta v$  и  $\Delta \Omega$ , в которые должны попадать нейтроны при рассеянии (очевидно, эта вероятность тем больше, чем больше величина “карманов”), от значений каждой из скоростей  $v'$  и  $v$  и, в общем случае, от координаты, т.е.  $P_s(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}', \Delta v, \Delta \Omega)$ . Эта вероятность попадания в конечные “карманы”  $\Delta v$  и  $\Delta \Omega$ , очевидно, аддитивна по  $\Delta v$  и  $\Delta \Omega$ . Ее производная по области  $\Delta v \cdot \Delta \Omega$  называется *индикатрисой рассеяния*  $g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$  и является вероятностью для нейтрона рассеяться из направления  $\vec{\Omega}'$  при скорости  $v'$  в единичный телесный угол с “осью”  $\vec{\Omega}$  и в единичный интервал скоростей около скорости  $v$ :

$$g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta \Omega \rightarrow 0}} \frac{P_s(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}', \Delta v, \Delta \Omega)}{|\Delta v \cdot \Delta \Omega|}. \quad (8.4)$$

Нормировка индикатрисы рассеяния учитывает тривиальный факт “сохранения нейтрона”, а именно: нейтрон, рассеявшись, попадет в какое-либо направление, принадлежащее полному телесному углу  $4\pi$ :

$$\int_0^\infty dv' \int_{4\pi} g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') d\Omega' = 1. \quad (8.5)$$

Для учета вклада в наш пучок нейтронов из других пучков сначала подсчитаем количество нейтронов, направления движения которых лежат в элементарном телесном угле  $d\Omega'$  с “осью”  $\vec{\Omega}'$ , а скорости – в элементарном интервале  $dv'$  около  $v'$ , рассеявшихся в элементарном объеме  $dV$  за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\Delta C_s = \Delta t \cdot \Sigma_s(\vec{r}, v') \cdot \phi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) dV d\Omega' dv'. \quad (8.6)$$

Далее необходимо нейтроны (8.6) “развернуть” в направлении  $\vec{\Omega}$  и “придать” им скорость  $v$ , что можно сделать при помощи оператора индикатрисы рассеяния (8.4):

$$\Delta C_s \cdot g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \Delta t \cdot \Sigma_s(\vec{r}, v') \cdot \phi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) \cdot g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') dV d\Omega' dv'. \quad (8.7)$$

Проинтегрировать элементарный вклад (8.7) по всему объему  $V$ , по всем исходным направлениям до рассеяния  $\vec{\Omega}'$  и по исходным скоростям  $v'$ , а также по величинам “карманов”  $\Delta\Omega$  и  $\Delta v$ ; в последних интегралах по  $d\Omega$  и  $dv$  применим теорему о среднем:

$$\Delta N_{v,\Omega} = \Delta\Omega \cdot \Delta v \cdot \Delta t \int_V dV \int_0^\infty dv' \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}, v') \cdot \phi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) \cdot g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') d\Omega'. \quad (8.8)$$

1.3. В среде могут находиться делящиеся материалы – ядра некоторых изотопов урана и плутония. Для простоты предположим, что в данном случае присутствует один делящийся изотоп.

Пусть  $\nu$  – среднее число вторичных нейтронов на один акт деления, вызванный нейтроном, имеющим скорость  $v'$ :  $\nu(v')$ .

Рассмотрим вероятность того, что нейтрон, имеющий до захвата делящимся изотопом скорость  $v'$  и направление движения  $\vec{\Omega}'$ , в результате деления высвободит вторичный нейтрон, который попадет в пучок  $(\Delta v \Delta\Omega)_{v,\vec{\Omega}}$ . Как показывает эксперимент, угловое распределение вторичных нейтронов изотропно, т.е. не зависит ни от угла между  $\vec{\Omega}'$  и  $\vec{\Omega}$ , ни от каждого из векторов  $\vec{\Omega}'$  и  $\vec{\Omega}$  в отдельности. Эта вероятность  $P$  зависит, естественно, от величины “карманов”  $\Delta v$  и  $\Delta\Omega$ , в которые должны попадать вторичные нейтроны (чем больше величины  $\Delta v$  и  $\Delta\Omega$ , тем больше вероятность), от значений каждой из скоростей  $v'$  и  $v$  и, в общем случае, от координаты, т.е.  $P_f(\vec{r}, v, v', \Delta v, \Delta\Omega)$ . Вероятность попадания в результате деления в конечные “карманы”  $\Delta v$  и  $\Delta\Omega$ , очевидно, аддитивна по  $\Delta v$  и  $\Delta\Omega$ . Ее производная по области  $\Delta v \cdot \Delta\Omega$

называется *плотностью вероятности деления*  $\chi(\vec{r}, v, v')/4\pi$ :

$$\frac{\chi(\vec{r}, v, v')}{4\pi} = \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ \Delta \Omega \rightarrow 0}} \frac{P_f(\vec{r}, v, v', \Delta v, \Delta \Omega)}{|\Delta v \cdot \Delta \Omega|}. \quad (8.9)$$

Теперь несложно подсчитать прибыль в пучок  $\Delta N_f$  за счет деления:

$$\Delta N_f = \frac{\Delta \Omega \cdot \Delta v \cdot \Delta t}{4\pi} \int_V dV \int_0^\infty dv' v(v') \cdot \Sigma_f(\vec{r}, v') \cdot \chi(\vec{r}, v, v') \int_{4\pi} d\Omega' \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t). \quad (8.10)$$

## 2. Расчет убыли нейтронов

2.1. Расчет убыли нейтронов начнем с интегрирования плотности поглощений в пучке:

$$\Delta N_a = \Delta \Omega \cdot \Delta v \cdot \Delta t \int_V \Sigma_a(\vec{r}, v) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) dV. \quad (8.11)$$

2.2. Аналогично учитывается убыль из пучка за счет рассеяния:

$$\Delta N_s = \Delta \Omega \cdot \Delta v \cdot \Delta t \int_V \Sigma_s(\vec{r}, v) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) dV. \quad (8.12)$$

Возможно рассеяние на малые углы, которое сохраняет направление в пределах пучка  $(\Delta v \Delta \Omega)_{v, \vec{\Omega}}$ . Вклад таких рассеяний может быть оценен (см. (3.30)) – этот вклад оказывается величиной более высокого порядка малости, чем вклады остальных компонентов баланса, поэтому учитываться не будет.

2.3. Механический увод из объема  $V$  подсчитывается интегрированием скалярного произведения плотности векторного тока на нормаль к поверхности, ограничивающей объем, по всей поверхности  $S$  данного объема. С учетом параметров пучка  $\Delta v$  и  $\Delta \Omega$  и интервала времени  $\Delta t$  запишем величину увода:

$$\Delta N_{sur} = \Delta \Omega \cdot \Delta v \cdot \Delta t \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS \equiv \oint_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) dS. \quad (8.13)$$

Здесь использована связь плотности векторного тока и плотности потока:  $\vec{j} = \vec{\Omega} \cdot \varphi$ . Запишем, наконец, соотношение баланса:

$$\Delta N_V = \Delta N_q + \Delta N_{v, \Omega} + \Delta N_f - \Delta N_a - \Delta N_s - \Delta N_{sur}, \quad (8.14)$$

или подробнее:

$$\begin{aligned}
 & \Delta\Omega\Delta v \int_V \left[ n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t + \Delta t) - n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) \right] dV = \\
 & = \Delta\Omega\Delta v \Delta t \left\{ - \oint_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) dS + \right. \\
 & + \int_V \left[ q(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) + \int_0^\infty dv' \left[ \int_{4\pi} \Sigma_s(\vec{r}, v') \cdot \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) \cdot g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') d\Omega' + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{4\pi} v(v') \cdot \Sigma_f(\vec{r}, v') \cdot \chi(\vec{r}, v, v') \int_{4\pi} d\Omega' \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) \right] - \right. \\
 & \left. \left. - \Sigma(\vec{r}, v) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) \right] dV \right\}, \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

где  $\Sigma(\vec{r}, v) = \Sigma_a(\vec{r}, v) + \Sigma_s(\vec{r}, v)$  – полное сечение взаимодействия.

Для преобразования поверхностного интеграла в объемный воспользуемся, как и при выводе односкоростного *УП*, теоремой Остроградского-Гаусса

$$\oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS \equiv \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV \equiv \int_V \nabla(\vec{\Omega} \cdot \varphi) dV \quad (8.16)$$

и в последнем интеграле (8.16) выполним дифференцирование произведения  $(\vec{\Omega} \cdot \varphi)$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_V \nabla(\vec{\Omega} \cdot \varphi) dV = \int_V \left[ \vec{\Omega} \nabla \varphi + \varphi \nabla \vec{\Omega} \right] dV = \\
 & = \int_V \vec{\Omega} \nabla \varphi dV + \int_V \left[ \varphi \cdot \left[ \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right] \right] dV = \int_V (\vec{\Omega} \nabla \varphi) dV. \quad (8.17)
 \end{aligned}$$

Второй из интегралов (8.17) зануляется в силу равенства нулю подынтегральной функции  $\varphi \cdot \text{div} \vec{\Omega}$ .



Поделим, с учетом преобразования поверхностного интеграла, обе части равенства (8.15) на произведение  $\Delta\Omega \cdot \Delta v \cdot \Delta t \neq 0$ , перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и перенесем все члены влево:

$$\int_V \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\Omega} \nabla \varphi + \Sigma \varphi - q - \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, v') dv' \int_{4\pi} g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) d\Omega' - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty v(v') \cdot \Sigma_f(\vec{r}, v') \cdot \chi(\vec{r}, v, v') \int_{4\pi} d\Omega' \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) \right] dV = 0. \quad (8.18)$$

Ввиду произвольности объема интегрирования и непрерывности подынтегральной функции из (8.18) следует равенство нулю подынтегрального выражения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\Omega} \nabla \varphi + \Sigma \varphi - q - \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, v') dv' \int_{4\pi} g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) d\Omega' - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty v(v') \cdot \Sigma_f(\vec{r}, v') \cdot \chi(\vec{r}, v, v') \int_{4\pi} d\Omega' \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) = 0. \quad (8.19)$$

Перейдем к одной функции  $\varphi \equiv n \cdot v$  и запишем *многоскоростное уравнение переноса*:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) + \Sigma(\vec{r}, v) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) = \\ = \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, v') dv' \int_{4\pi} g(\vec{r}, v, v', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) d\Omega' + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty v(v') \cdot \Sigma_f(\vec{r}, v') \cdot \chi(\vec{r}, v, v') \int_{4\pi} d\Omega' \varphi(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t) + q(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t). \quad (8.20)$$

Для задач, в которых плотность фазового потока  $\varphi$  не зависит от времени, т.е.  $\partial \varphi / \partial t = 0$ , используется *стационарное многоскоростное уравнение*.

Уравнение переноса (8.20) должно быть дополнено начальными и граничными условиями. Эти условия совпадают по форме с условиями

для односкоростного УП, добавляется только параметрическая зависимость от скорости  $v$ . Итак, начальные условия: в момент времени  $t = t_0$  задается распределение плотности фазового потока:

$$\varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t_0) = f(\vec{r}, v, \vec{\Omega}), \quad (8.21)$$

где  $f(\vec{r}, v, \vec{\Omega})$  – известная функция. Контактные граничные условия на поверхности раздела двух сред:

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}_{s-0}, v, \vec{\Omega}, t) = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}_{s+0}, v, \vec{\Omega}, t). \quad (8.22)$$

Соответственно условия на поверхности раздела невогнутого тела с пустотой, если в пустоте нет источников, записываются так:

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \cdot \varphi(\vec{r}_s, v, \vec{\Omega}, t) = 0 \quad \text{при} \quad (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \leq 0. \quad (8.23)$$

Для многоскоростного УП формулируются соответствующие краевые задачи, в которых искомая функция плотности фазового потока зависит от скорости (энергии).

## 8.2. Групповой подход в задачах переноса

Наиболее широко распространенный способ упрощения энергетической зависимости плотности потока в УП – групповой подход, при котором нейтроны (или фотоны) с достаточно близкими энергиями объединяются в группы. При групповом подходе весь диапазон изменения энергии  $E$ , начиная с области высоких энергий ( $E_0$  – максимальная энергия, учитываемая в расчете, например  $E_0 = 18$  МэВ), разбивается на отдельные смежные интервалы (группы энергий) шириной  $\Delta E_i = [E_{i-1} - E_i]$  так, что  $E_{i-1} > E_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$  номер группы. Приведем конкретный пример разбиения на группы, принятый при одном варианте практического расчета защиты ядерного реактора.

Номер группы $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$E_i$ , МэВ	14.0	10.5	6.5	4.0	2.5	1.4	0.8	<0.8
$\Delta E_i$ , МэВ	$[E_0, 14.0]$	3.5	4.0	2.5	1.5	1.1	0.6	0.8

Искомой функцией становится кусочно-постоянная аппроксимация плотности потока – “плотность группового потока” – как интеграла по энергии:

$$\varphi^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{E_i}^{E_{i-1}} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE. \quad (8.24)$$

В групповой модели энергетическая зависимость сечений и источников также аппроксимируется кусочно-постоянными на энергетическом интервале групповыми функциями.

Запишем стационарное уравнение переноса:

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) + \Sigma(\vec{r}, v) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) = \\ & = \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E') dE' \int_{4\pi} g(\vec{r}, E, E', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \cdot \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) d\Omega' + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Здесь как обычно:

- $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  – плотность фазового потока нейтронов;
- $\Sigma$  – полное макросечение взаимодействия нейтронов с ядрами среды;
- $\Sigma_s$  – макросечение рассеяния;
- $g(\vec{r}, E, E', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$  – индикатриса рассеяния нейтронов, определяющая плотность вероятности рассеяния из направления  $\vec{\Omega}'$  в направление  $\vec{\Omega}$  с потерей энергии от  $E'$  до  $E$ ;
- $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  – плотность источников.

Перепишем уравнение (8.25), несколько его упростив:

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) + \Sigma(\vec{r}, v) \cdot \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) = \\ & = \int_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \cdot \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t), \end{aligned} \quad (8.26)$$

где величина  $\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \equiv \Sigma_s(\vec{r}, E') \cdot g(\vec{r}, E, E', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$  пропорциональна произведению вероятности рассеяться при энергии  $E'$  (это  $\Sigma_s(\vec{r}, E')$ ) и вероятности рассеяться из направления  $\vec{\Omega}'$  в направление  $\vec{\Omega}$  с изменением энергии от  $E'$  до  $E$  (это  $g(\vec{r}, E, E', \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$ ).

Проинтегрируем (8.26) по энергии в пределах  $i$ -й энергетической группы и получим “групповое” уравнение, а точнее – систему групповых уравнений:

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \cdot \nabla \varphi^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sigma^i \vec{r}, \vec{\Omega} \cdot \varphi^i \vec{r}, \vec{\Omega} = \\ & = \sum_{j=1}^i \int_{4\pi} \Sigma_s^{j \rightarrow i}(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \cdot \varphi^j(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\Omega' + q^i(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Sigma^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \frac{\int_{\Delta E_i} \Sigma(\vec{r}, E) \cdot \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE}{\int_{\Delta E_i} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE}; \quad q^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\Delta E_i} q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}); \\ \Sigma_s^{j \rightarrow i}(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) &= \frac{\int_{\Delta E_i} dE \int_{\Delta E_j} dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \cdot \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}')}{\int_{\Delta E_j} \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') dE'}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

В выражении (8.27) интеграл по  $dE'$  по всему диапазону энергий заменен суммой интегралов по групповым диапазонам, причем поскольку рассеяние может приводить только к потере энергии, эта сумма начинается интегралом по первому энергетическому интервалу (по первой группе). Отметим, что нумерация групп – обычно от больших энергий к меньшим. В первом энергетическом интервале  $\Delta E_i = E_0 - E_1$  значение максимальной энергии  $E_0$  обычно выбирается достаточно большим: 10–18 МэВ. Последний член суммы – интеграл по данной  $i$ -й энергетической группе.

Система групповых уравнений (8.27) строго эквивалентна (относительно групповых потоков) многоскоростному уравнению (8.26) в том случае, если групповые величины (групповые сечения) выражены формулами (8.28), т.е. усредняются с весом искомой функции  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , которая, естественно, заранее неизвестна. Отсюда следует, что для получения групповых значений сечений необходима какая-то оценка неизвестного решения  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ . Положение несколько облегчается тем, что неизвестное решение входит в числитель и знаменатель группового сечения (8.28), из чего следует относительно малая чувствительность групповых сечений к ошибкам в  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ . Методы получения групповых сечений представляют собой обширную квазинезависимую сферу исследований, на подробностях которой задерживаться

не будем, сосредоточившись только на теории возмущений, дающей, в частности, и общий формализм подхода к константной проблеме.

### 8.3. Сопряженные функции и уравнения

Если известно значение функции плотности потока  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , то любую физическую величину, линейно связанную с этой функцией, можно выразить в виде линейного функционала

$$I_p = \int d\vec{r} \int dE \int d\Omega \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cdot p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \equiv \langle \varphi, p \rangle. \quad (8.29)$$

Здесь для краткости угловыми скобками обозначено интегрирование по всем переменным. Функция  $p(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  характеризует связь рассматриваемой физической величины  $I_p$  с плотностью потока  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ . Ее физический смысл – вклад единичной плотности потока в измеряемую величину  $I_p$ . Приведем примеры типичных функционалов.

1. Количество столкновений в некоторой фиксированной точке  $\vec{r}'$  в единицу времени

$$I_p(\vec{r}') = \int d\Omega \int dE \int \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cdot \Sigma(E) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}. \quad (8.30)$$

Здесь  $p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \Sigma(E) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ , где  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  – дельта-функция.

2. Доза в некоторой произвольно фиксированной точке  $\vec{r}'$ :

$$I_p(\vec{r}') = \int d\Omega \int dE \int \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cdot D(E) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}, \quad (8.31)$$

где  $D(E)$  – доза, определяемая единичным потоком излучения с энергией  $E$ . Здесь  $p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = D(E) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ .

3. Плотность потока излучения в произвольно фиксированной точке  $\vec{r}'$  с направлением скорости  $\vec{\Omega}$  и энергией  $E'$ :

$$I_p(\vec{r}') = \int \int \int \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta(E - E') \cdot \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}') d\vec{r} dE d\Omega. \quad (8.32)$$

Здесь  $p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta(E - E') \cdot \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}')$ .

Значение функционала (8.29) и его конкретных модификаций (8.30)-(8.32) можно определить также с помощью функции  $\varphi^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , сопряженной потоку  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ :

$$I_p = I_q = \int d\vec{r} \int dE \int d\Omega \varphi_p^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \cdot q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \equiv \langle \varphi_p^*, q \rangle. \quad (8.33)$$

Здесь  $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  – источник в УП (8.25), а  $\varphi_p^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  – решение сопряженного уравнения. Это уравнение будет получено ниже. Здесь отметим, что, в отличие от универсальной сопряженной функции, фигурирующей при расчете критичности реактора, – функции «ценности» нейтронов, при расчете характеристик защиты от излучения используются различные сопряженные функции, каждая из которых относится к определенному функционалу. В расчетах защиты сопряженную функцию  $\varphi_p^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  принято называть функцией «опасности» нейтронов. «Опасность» нейтронов  $\varphi_p^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  характеризует вклад в исследуемый функционал  $I_p$  от единичного нейтронного потока в точке  $\vec{r}$  с энергией  $E$  по направлению  $\vec{\Omega}$ . Так, существует «опасность» нейтронов по отношению к дозе в какой-либо точке, «опасность» по отношению к полному потоку внутри слоя или на границе и т.д.

Получим сопряженное уравнение. Для этого запишем уравнение (8.25) в операторном виде

$$\hat{L}\varphi = q. \quad (8.34)$$

Тогда сопряженное уравнение запишется следующим образом:

$$\hat{L}^*\varphi^* = p. \quad (8.35)$$

Здесь  $\hat{L}^*$  – сопряженный по Лагранжу оператор, который определяется из соотношения

$$\int \int \int \varphi^* \hat{L}\varphi d\vec{r} dE d\vec{\Omega} = \int \int \int \varphi \hat{L}^*\varphi^* d\vec{r} dE d\vec{\Omega}, \quad (8.36)$$

$\varphi^*$  – сопряженная по потоку нейтронов функция «опасности» нейтронов;  $p$  – произвольная пока функция. В краткой записи (8.36) будет выглядеть следующим образом:

$$\langle \varphi^*, \hat{L}\varphi \rangle = \langle \varphi, \hat{L}^*\varphi^* \rangle. \quad (8.37)$$

Запишем последнее выражение, воспользовавшись (8.34), (8.35):

$$\langle \varphi^*, q \rangle = \langle \varphi, p \rangle. \quad (8.38)$$

Сопоставляя (8.27) и (8.38), запишем

$$I_p[\varphi] = \langle \varphi, p \rangle = \langle \varphi^*, q \rangle = I_q[\varphi^*], \quad (8.39)$$

т.е. здесь соотношение (8.33) получено строго, один и тот же функционал можно получить двумя способами.

Из этого следует, что каждому линейному функционалу  $I_p[\varphi]$  может быть поставлена в соответствие функция  $\varphi^*$ , удовлетворяющая уравнению (8.35), причем в качестве свободного члена этого уравнения следует использовать именно функцию  $p$ , характеризующую интересующий нас процесс. Поэтому функцию  $\varphi^*$  следует индексировать  $\varphi_p^*$ .

Получим сопряженное уравнение, т.е. найдем вид сопряженного оператора  $\hat{L}^*$ , исходя из условия (8.36). Рассмотрим левую часть уравнения (8.36), используя явный вид оператора  $\hat{L}$  из (8.25):

$$\begin{aligned} \int \int \int \varphi^* \hat{L} \varphi d\vec{r} dE d\vec{\Omega} = \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi^* \cdot \left[ \vec{\Omega} \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \right. \\ \left. - \int d\Omega' \int_E^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \right]. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int d\vec{r} \varphi^* \vec{\Omega} \nabla \varphi. \quad (8.41)$$

Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса

$$\int_V d\vec{r} (\vec{\Omega} \nabla) \varphi \varphi^* = \int_S dr_s |\vec{\Omega} \vec{n}| \varphi \varphi^*, \quad (8.42)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ , получаем

$$\int_V d\vec{r} \varphi^* \vec{\Omega} \nabla \varphi = - \int_V d\vec{r} \varphi \vec{\Omega} \nabla \varphi^* + \int_S dr_s |\vec{\Omega} \vec{n}| \varphi \varphi^*. \quad (8.43)$$

Для простоты рассмотрим случай нулевых граничных условий (отсутствия внешнего облучения):

$$\varphi(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0 \quad \text{при} \quad (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0. \quad (8.44)$$

Если теперь потребовать, чтобы

$$\varphi^*(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0 \quad \text{при} \quad (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0, \quad (8.45)$$

то, с учетом (8.44), будем иметь

$$\int_S dr_s |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \varphi \varphi^* = 0. \quad (8.46)$$

Следовательно, первый член правой части (8.40) можно записать так:

$$\int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi^* \vec{\Omega} \varphi = - \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi \vec{\Omega} \varphi^*. \quad (8.47)$$

В третьем члене правой части (8.40) изменим порядок интегрирования по углам:

$$\begin{aligned} & - \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \int d\vec{\Omega}' \int_E^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') = \\ & = - \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega}' \int_E^\infty dE' \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \int d\vec{\Omega} \int dE \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (8.48)$$

Для удобства переобозначим переменные интегрирования и изменим соответствующим образом пределы интегрирования по энергиям:

$$- \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \int d\vec{\Omega}' \int_0^E dE' \Sigma_s(\vec{r}, E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \varphi^*(\vec{r}, E', \vec{\Omega}'). \quad (8.49)$$

Учитывая (8.47) и (8.49), выражение (8.40) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi^* \hat{L} \varphi = \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi \cdot \left[ -\vec{\Omega} \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \right. \\ \left. - \int d\vec{\Omega}' \int_0^E dE' \Sigma_s(\vec{r}, E \rightarrow E', \mu \rightarrow \mu') \varphi^*(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \right]. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Окончательно сопряженное уравнение (8.35) будет выглядеть так:

$$-\vec{\Omega} \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* = \int d\vec{\Omega}' \int_0^E dE' \Sigma_s(\vec{r}, E \rightarrow E', \mu \rightarrow \mu') \varphi^*(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}), \quad (8.51)$$

а соответствующее “нулевое” граничное условие:

$$\varphi^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = 0 \quad \text{при} \quad (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0. \quad (8.52)$$



### 8.4. Теория возмущений

Получим соотношения теории возмущений для линейных функционалов. Если свойства среды изменяются, т.е. оператор уравнения (8.34) переходит в “возмущенное” состояние:

$$\hat{L}' = \hat{L} + \delta\hat{L}, \quad (8.53)$$

то изменяется и решение задачи –  $\varphi$ , следовательно,

$$\varphi \rightarrow \varphi'; \quad I_p[\varphi] \rightarrow I_p' = I_p + \delta I_p. \quad (8.54)$$

Не будем фиксировать пока конкретно “способ” изменения оператора  $\hat{L}$ . Это может быть, например, изменение размеров области (т.е. воздействие на градиентный член) или изменение состава материалов (т.е. воздействие на плотность столкновений и интеграл рассеяния) и т.д. Установим связь изменения оператора и функционала. Возмущенная система описывается уравнением

$$\hat{L}'\varphi' = (\hat{L} + \delta\hat{L})\varphi' = q', \quad (8.55)$$

где  $q' = q + \delta q$  – возмущенный источник. Сопряженная функция невозмущенной системы, соответствующая функционалу  $I_p$ , описывается уравнением

$$\hat{L}^*\varphi_p^* = p. \quad (8.56)$$

Умножим (8.55) на  $\varphi_p^*$ , а (8.56) – на  $\varphi'$  и проинтегрируем полученные выражения по всем переменным. Затем вычтем одно из другого и, пользуясь определением сопряженного оператора (8.37), получим слева

$$\langle \varphi_p^*, (\hat{L}'\varphi') \rangle - \langle \varphi', (\hat{L}^*\varphi_p^*) \rangle = \langle \varphi_p^*, (\delta\hat{L}\varphi') \rangle, \quad (8.57)$$

а справа, в силу (8.38), будем иметь

$$\begin{aligned} \langle \varphi_p^*, q' \rangle - \langle \varphi', p \rangle &= \langle \varphi_p^*, q \rangle + \langle \varphi_p^*, \delta q \rangle - \langle \varphi', p \rangle = \\ &= \langle \varphi_p^*, q \rangle - \langle \varphi', (p + \delta p) \rangle + \langle \varphi_p^*, \delta q \rangle + \langle \varphi', \delta p \rangle. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Здесь  $\delta p$  – некоторое возмущение источника сопряженной задачи:

$$p' = p + \delta p. \quad (8.59)$$

Воспользуемся выражением для возмущенного функционала

$$I_p'[\varphi'] = \langle \varphi', p' \rangle = I_q'[\varphi^{*'}] = \langle \varphi^{*'}, q' \rangle. \quad (8.60)$$

Приравнивая выражения (8.57) и (8.58), в соответствии с формулами (8.39), (8.59) и (8.60), находим

$$\langle \varphi_p^*, (\hat{\delta L} \varphi') \rangle = I_p - I'_p + \langle \varphi_p^*, \delta q \rangle + \langle \varphi', \delta p \rangle. \quad (8.61)$$

Отсюда, используя формулу (8.54), получим общее соотношение теории возмущений

$$\delta I_p = \langle \varphi_p^*, \delta q \rangle + \langle \varphi', \delta p \rangle - \langle \varphi_p^*, (\hat{\delta L} \varphi') \rangle. \quad (8.62)$$

Если вместо уравнений (8.55) и (8.56) рассмотреть сопряженное уравнение

$$(\hat{L}^* + \hat{\delta L}) \varphi_p^{*'} = p' \quad (8.63)$$

и невозмущенное основное кинетическое уравнение (8.34), аналогичным путем можно получить выражение, эквивалентное выражению (8.62):

$$\delta I_p = \langle \varphi, \delta p \rangle + \langle \varphi_p^{*'}, \delta q \rangle - \langle \varphi, (\hat{\delta L}^* \varphi_p^{*'}) \rangle. \quad (8.64)$$

При отсутствии возмущения величин источников  $p$  и  $q$ , т.е.  $\delta p = 0$ ,  $\delta q = 0$ , формулы теории возмущений (8.62) и (8.64) существенно упрощаются:

$$\delta I_p = -\langle \varphi_p^*, (\hat{\delta L} \varphi') \rangle, \delta I_p = -\langle \varphi, (\hat{\delta L}^* \varphi_p^{*'}) \rangle. \quad (8.65)$$

Запишем эти соотношения теории возмущений в явном виде через изменения параметров среды. Пусть различные возмущения в рассматриваемой системе приводят к изменению сечений взаимодействия нейтронов с веществом:

$$\Sigma \rightarrow \Sigma + \delta \Sigma, \quad \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \rightarrow \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) + \delta \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu). \quad (8.66)$$

При этом изменяется оператор как основного кинетического уравнения ( $\hat{L} \rightarrow \hat{L} + \hat{\delta L}$ ), так и сопряженного уравнения ( $\hat{L}^* \rightarrow \hat{L}^* + \hat{\delta L}^*$ ), причем

$$\hat{\delta L} = \delta \Sigma - \int d\vec{\Omega}' \int_E^\infty dE' \delta \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu), \quad (8.67)$$

$$\hat{\delta L}^* = \delta \Sigma - \int d\vec{\Omega}' \int_0^E dE' \delta \Sigma_s(E \rightarrow E', \mu \rightarrow \mu'). \quad (8.68)$$

Подставив эти выражения в уравнения (8.65) и (8.66) соответственно, получим формулы теории возмущений в виде

$$\delta I_p = - \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi_p^* \left[ \delta \Sigma \varphi' - \int d\vec{\Omega}' \int_E^\infty dE' \delta \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \varphi'(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \right], \quad (8.69)$$

$$\delta I_p = - \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi \left[ \delta \Sigma \varphi_p^{*'} - \int_0^E d\vec{\Omega}' \int dE' \delta \Sigma_s(E \rightarrow E', \mu \rightarrow \mu') \varphi_p^{*'}(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \right]. \quad (8.70)$$

Теория малых возмущений, часто применяемая в расчетах реактора и защиты, состоит в следующем. Если возмущение оператора  $\hat{L}$  (а следовательно, и  $\hat{L}^*$ ) мало, так что оно не очень сильно искажает функции  $\varphi$  и  $\varphi_p^*$ , то в формулах (8.62) - (8.70) можно заменить  $\varphi' \rightarrow \varphi$  и  $\varphi_p^{*'} \rightarrow \varphi_p^*$ . При этом получаются формулы теории малых возмущений. В частности,

$$\delta I_p = - \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi_p^* \delta \hat{L} \varphi, \quad (8.71)$$

$$\delta I_p = - \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} \int dE \varphi \delta \hat{L}^* \varphi_p^*. \quad (8.72)$$

Эквивалентность этих соотношений следует из сопряженности операторов  $\delta \hat{L}$  и  $\delta \hat{L}^*$ .

Вариация оператора  $\delta \hat{L}$  означает изменение (возмущение) свойств среды. Характер этих изменений может быть как естественным (выгорание делящегося вещества со временем в работающем ядерном реакторе и накопление в нем продуктов деления; погружение регулирующих стержней в активную зону реактора или извлечение их оттуда; аварийный режим при прорыве, например, канала с жидким теплоносителем в реакторе и т.д.), так и искусственным, когда, например, уточняются сечения нейтрон-ядерных реакций на основе более совершенного эксперимента (в этом случае объективные свойства веществ не меняются, а меняются лишь наши сведения о них) или фиктивно

меняются параметры среды для упрощения математического моделирования (в частности, это относится к методам гомогенизации гетерогенной активной зоны реактора, к получению многогрупповых констант при многогрупповом методе решения уравнений переноса излучения и т.д.).

Полученные формулы можно использовать для анализа влияния различных факторов при оценке небольших изменений в конструкции системы без расчетов для возмущенной системы. Формулы теории возмущений используют при оптимизации реакторных и защитных композиций, при групповом анализе уравнения переноса, в расчетах чувствительности функционалов к возмущениям и т.д.

## ГЛАВА 9

### ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим простейшую иллюстрацию применения теории малых возмущений в задачах оптимизации характеристик поля излучения.

#### 9.1. Общая формулировка задачи

Пусть плоскопараллельная защита от излучения облучается “слева” (рис. 9.1) первичными нейтронами и гамма-квантами, падающими нормально к поверхности. При прохождении нейтронов в слоях генерируется вторичное гамма-излучение. На “правой” поверхности  $x = H$  измеряется мощность дозы излучений (как нейтронов, так и гамма-излучения). Типичная задача оптимизации формулируется таким образом:

**Формулировка I.** *Посредством варьирования толщин слоев  $X_k = x_k - x_{k-1}$  при сохранении постоянной полной толщины защит минимизировать мощность дозы  $D = D_n + D_\gamma + D_{n\gamma}$  на поверхности  $x = H$ .*

Индексы у обозначений мощности дозы соответствуют нейтронной и гамма-компоненте излучения.

В задачах оптимизации характеристик защиты транспортных реакторных установок часто фиксируется не размер защиты, а ее масса. Поэтому приведенная выше формулировка задачи изменяется:

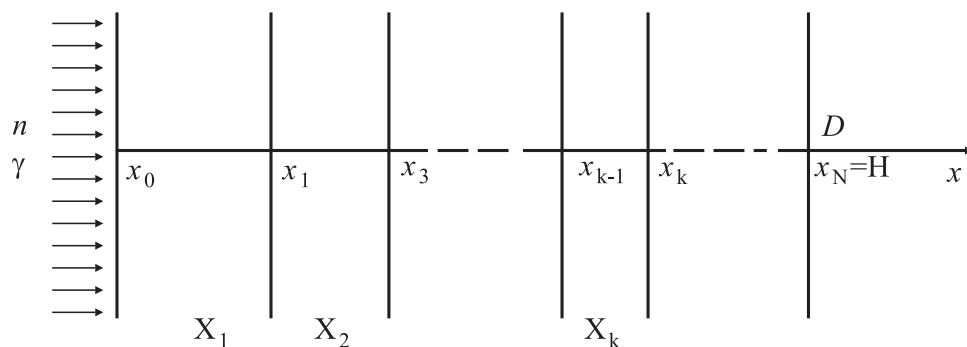


Рис. 9.1. Плоскопараллельная задача оптимизации

**Формулировка II.** *Посредством варьирования толщин слоев  $X_k = x_k - x_{k-1}$  при сохранении постоянной полной массы защиты минимизировать мощность дозы  $D = D_n + D_\gamma + D_{ng}$  на поверхности  $x = H$ .*

Возможна и “обратная” формулировка, при которой фиксируется уровень интенсивности излучений, а варьированием переменных задачи минимизируется, например, масса защиты или ее частей:

**Формулировка III.** *Посредством варьирования толщин слоев  $X_k = x_k - x_{k-1}$  при сохранении заданного уровня мощности дозы  $D = D_n + D_\gamma + D_{ng}$  на поверхности  $x = H$  минимизировать полную массу защиты.*

Вернемся к формулировке I и рассмотрим подходы к решению сформулированной таким образом задачи оптимизации.

## 9.2. Оптимизация функции

Для анализа и решения оптимизационных задач развито несколько специальных математических дисциплин (в частности, линейное и нелинейное программирование, теория оптимального управления и т.д.). Для наших целей достаточно иметь представление о *градиентных методах* оптимизации. Кратко изложим основные принципы градиентного метода.

Сущность любого из градиентных методов состоит в использовании производной  $f'(\vec{\xi})$  (градиента) оптимизируемой функции  $f(\vec{\xi})$  многих переменных  $\vec{\xi} : \{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N\}$  для построения последовательности векторов  $\vec{\xi}_0, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_k$ , удовлетворяющих условию

$$f(\vec{\xi}_0) > f(\vec{\xi}_1) > \dots > f(\vec{\xi}_k) >, \quad (9.1)$$

т.е. последовательности векторов (точек), обеспечивающих движение к оптимуму (здесь – к минимуму). Точки последовательности  $(\vec{\xi}_k)$  вычисляются по формуле

$$\vec{\xi}_{k+1} = \vec{\xi}_k + \alpha_k \cdot \vec{h}_k, \quad (9.2)$$

где  $\vec{h}_k$  – направление движения к оптимуму, а  $\alpha_k$  – длина шага вдоль этого направления. Градиент функции используется для определения этого направления.

Как известно из анализа, градиент скалярной функции  $f(\vec{\xi})$  в некоторой точке  $\vec{\xi} : \{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N\}$  направлен в сторону наискорейшего возрастания функции и ортогонален линии уровня (т.е. поверхности по-

стоянного значения функции  $f(\vec{\xi})$ , проходящей через точку  $\vec{\xi}_k$ . Вектор, противоположный градиенту  $f'(\vec{\xi}_k)$  – антиградиент – направлен в сторону наискорейшего убывания функции  $f(\vec{\xi})$ . Выбирая в качестве направления движения  $\vec{h}$  в (9.2) антиградиент функции  $f(\vec{\xi})$  в точке  $\vec{\xi}_k$ , приходим к итерационному процессу вида

$$\vec{\xi}_{k+1} = \vec{\xi}_k - \alpha_k \cdot f'(\vec{\xi}_k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.3)$$

В координатной форме этот процесс записывается следующим образом:

$$\xi_{k+1}^i = \xi_k^i - \alpha_k \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(\vec{\xi}_k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.4)$$

Итак, для решения нашей оптимизационной задачи необходимо уметь вычислять градиент минимизируемой функции, в данном конкретном случае – вектор, составленный производными этой функции по толщинам слоев оптимизируемой композиции (см. рис. 9.1). Покажем, как при вычислении градиента используются формулы теории возмущений.

Далее, вплоть до особых оговорок, все излагаемое можно считать относящимся как к нейтронам, так и к фотонам.

### 9.3. Многогрупповая задача

Задача расчета характеристик полей излучений обладает азимутальной симметрией. Для таких задач ранее было получено односкоростное уравнение следующего вида (см. (3.51)):

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma \cdot \Phi = \Sigma_s \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}(x, \mu, \mu') \cdot \Phi(x, \mu') d\mu' + q(x, \mu), \quad (9.5)$$

где  $\bar{g}(x, \mu, \mu')$  – усредненная по азимутальному углу (от которого решение не зависит) индикатриса рассеяния:

$$\bar{g}(x, \mu, \mu') = \int_0^{2\pi} d\psi' g(x, \mu_0). \quad (9.6)$$

В нашем конкретном случае (многогрупповая задача; внешнее облучение) многогрупповые уравнения для нейтронов примут такой вид:

$$\mu \frac{\partial \varphi^j}{\partial x} + \Sigma^j \cdot \varphi^j = \sum_{i=1}^j \Sigma_s^i \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}^{i \rightarrow j}(x, \mu, \mu') \cdot \varphi^i(x, \mu') d\mu' + q^j \cdot \delta(x) \cdot \delta(\mu - 1),$$

$$j = 1, 2, \dots, J$$

Отметим, что все групповые характеристики (сечения  $\Sigma^j$  и индикатрисы  $\bar{g}^{i \rightarrow j}$  предполагаются кусочно-постоянными в пределах слоя (см. рис. 9.1). Задача переноса в данном случае может быть сформулирована двояко:

а) уравнение (9.7) плюс граничные условия отсутствия внешнего облучения или

б) уравнение (9.8) плюс условия внешнего облучения (9.9)

$$\mu \frac{\partial \varphi^j}{\partial x} + \Sigma^j \cdot \varphi^j = \sum_{i=1}^j \Sigma_s^i \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}^{i \rightarrow j}(x, \mu, \mu') \cdot \varphi^i(x, \mu') d\mu';$$

$$\begin{aligned} \varphi^j(x=0, \mu) &= f_0^j \cdot \delta(\mu - 1); & \mu > 0, \\ \varphi^j(x=H, \mu) &= 0; & \mu < 0. \end{aligned}$$

Пусть в точке  $x = H$  (см. рис. 9.1) регистрируется мощность дозы излучений

$$D = 2\pi \cdot \sum_{i=1}^J \int_{-1}^1 \varphi^i \cdot p^i(x, \mu) d\mu$$

детектором с характеристикой  $p^j(\cdot)$  для данной группы “ $j$ ”, причем для простоты пусть детектор будет точечным и коллимированным:

$$p^j(\cdot) = D^j \cdot \delta(x - H) \delta(\mu - 1) \cdot p^i(x, \mu) d\mu.$$

Из этого следует, что для функции “опасности” нейтронов относительно мощности дозы в точке  $x = H$  может быть сформулирована краевая задача, сопряженная задаче (9.8) – (9.9). В данном случае соответствующие уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$-\mu \frac{\partial \varphi^{*j}}{\partial x} + \Sigma^j \cdot \varphi^{*j} = \sum_{i=j}^J \Sigma_s^i \cdot \int_{-1}^1 \bar{g}^{j \rightarrow i}(x, \mu, \mu') \cdot \varphi^{*i}(x, \mu') d\mu';$$



$$\begin{aligned}\varphi^{*j}(x=H, \mu) &= D_0^j \cdot \delta(\mu+1); \quad \mu < 0, \\ \varphi^{*j}(x=0, \mu) &= 0; \quad \mu > 0,\end{aligned}\tag{9.13}$$

где  $D^j$  – “дозовый коэффициент”, т.е. коэффициент, связывающий плотность потока нейтронов  $j$ -й группы с мощностью дозы. Введем, наконец, последнее усложнение задачи: учтем вторичное гамма-излучение. Дело в том, что без учета вторичного гамма-излучения оптимизационная задача теряет практический интерес. Вторичное гамма-излучение вносит существенный вклад в мощность дозы за защитой, причем в некоторых случаях увеличение толщины слоев ведет к увеличению генерации вторичного гамма-излучения и соответственно к росту (!) мощности дозы.

Итак, система уравнений (9.8) написана как для нейтронов, так и для фотонов. Для учета вторичного гамма-излучения, которое *изотропно*, в правые части уравнения (9.8) для фотонов следует внести источники  $f^j(x)$  следующего вида:

$$\begin{aligned}f^{j(\gamma)} &= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{i=1}^{J(n)} S^{i(n) \rightarrow j(\gamma)}(x) \cdot \varphi_0^{i(n)}(x); \\ S^{i(n) \rightarrow j(\gamma)}(x) &= \eta^{i(n) \rightarrow j(\gamma)}(x) \cdot \Sigma_{n\gamma}; \\ \varphi_0^{i(n)}(x) &= 2\pi \int_{-1}^1 \varphi^{i(n)}(x, \mu) d\mu;\end{aligned}\tag{9.14}$$

$\Sigma_{n\gamma}^{i(n)}(x)$  – сечение радиационного захвата нейтронов “ $i$ ”-й группы;  
 $\eta^{i(n) \rightarrow j(\gamma)}(x)$  – выход фотонов “ $j$ ”-й энергетической группы при захвате одного нейтрона “ $i$ ”-й энергетической группы;  
 $\varphi_0^{i(n)}$  – полный поток нейтронов “ $i$ ”-й группы.

Запишем систему уравнений для нейтронов и фотонов в операторном виде:

$$\left. \begin{aligned}\hat{L}^{(n)} \varphi^{(n)} &= 0, \\ \hat{L}^{(\gamma)} \varphi^{(\gamma)} &= f^{(\gamma)}.\end{aligned} \right\}\tag{9.15}$$

Здесь введены векторы размерностью, равной количеству групп:

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)} &= \{\varphi^{i(n)}, \dots, \varphi^{J(n)}\}; \quad \varphi^{(\gamma)} = \{\varphi^{i(\gamma)}, \dots, \varphi^{J(\gamma)}\}; \\ f^{(\gamma)} &= \{f^{i(\gamma)}, \dots, f^{J(\gamma)}\},\end{aligned}$$

где  $J$  – полное количество групп для нейтронов и фотонов соответственно.

Система уравнений (9.15), совместно с граничными условиями типа (9.9), образует “прямую” задачу. Если для системы (9.15) проделать процедуру сопряжения, аналогичную описанной выше в п. 8.4, получим следующую систему *сопряженных* уравнений для функции «опасности» излучений или «ценности» относительно вклада в показания дозового детектора:

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}^{*(\gamma)} \Phi^{*(\gamma)} &= 0, \\ \hat{L}^{*(n)} \Phi^{*(n)} &= f^{*(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

Вид сопряженных операторов  $\hat{L}^*$  ясен из уравнений (9.12). Система (9.16), дополненная граничными условиями (9.13), образует сопряженную задачу. Отметим, что в сопряженной задаче для нейтронов появляется источник, учитывающий «опасность» нейтронов относительно генерации вторичного гамма-излучения, которое, в соответствии со вторым уравнением (9.16), дойдет от точки генерации до детектора. Вид этого источника таков:

$$f^{*(n)} = \left\{ f^{*1(n)}, \dots, f^{*J(n)} \right\}, \quad (9.17)$$

$$f^{*j(n)} = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{i=1}^{J(\gamma)} S^{j(n) \rightarrow i(\gamma)}(x) \cdot \Phi_0^{i(\gamma)}(x). \quad (9.18)$$

Отметим, что при решении сопряженной задачи вначале решается задача для фотонов, а потом для нейтронов (в “прямой” же задаче полученные сначала потоки нейтронов используются при решении задачи для фотонов для расчета источников (9.14)). Далее, порядок счета по группам при решении сопряженной задачи изменяется на обратный: в “прямой” задаче мы идем “сверху вниз” по энергии, что соответствует потере энергии движущихся частиц при рассеянии, а в сопряженной счет начинается с группы  $J$  с минимальной энергией частиц.

#### 9.4. Теория возмущений в задаче оптимизации

Обратимся, наконец, к собственно задаче оптимизации. По условию, мы варьлируем толщины слоев и минимизируем мощность дозы  $D$  (см. (9.10)) в точке  $x = H$ , причем характеристика детектора выглядит в соответствии с (9.11). При вариации толщин возмущаются операторы  $\hat{L}$  и правые части  $f$  систем уравнений (9.11) и (9.12). Предположим, что эти возмущения малы настолько, насколько это требуется

для применимости теории малых возмущений, изложенной в предыдущем подразделе. В этом случае для расчета возмущения функционала (например, показаний детектора в точке  $x = H$  на рис. 9.1) можно воспользоваться формулой (8.64), которая в предположении малости возмущений запишется так:

$$\delta I_p = \langle \varphi, \delta p \rangle + \langle \varphi_p^*, \delta q \rangle - \langle \varphi, (\hat{\delta L}^* \varphi_p^*) \rangle. \quad (9.19)$$

В нашем конкретном случае возмущения правых частей  $\delta q$  и  $\delta p$  – это возмущения источников вторичного гамма-излучения и соответствующих источников «опасности» этого излучения. Эти источники *не являются независимыми*, поэтому вычисления по формуле (9.19) привели бы к двойному учету вклада от возмущения источников вторичного гамма-излучения. Наша расчетная формула, на самом деле, такова:

$$\delta I_p = -\langle \varphi, (\hat{\delta L}^* \varphi_p^*) \rangle + \langle \varphi, \delta f^* \rangle. \quad (9.20)$$

Поскольку мы собираемся воспользоваться *градиентным методом* решения оптимизационной задачи, нам нужно получить вектор, составленный производными полной мощности дозы  $D$  по толщинам зон  $X_k$ :

$$\text{grad} D: \left\{ \frac{\partial D}{\partial X_1}, \frac{\partial D}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial D}{\partial X_k}, \dots, \frac{\partial D}{\partial X_N} \right\}. \quad (9.21)$$

Будем считать, что возмущение вносится сдвигом границы “ $k$ ”-й зоны  $x_k$ , т.е. или материал “ $k$ ”-й зоны заменяет собой материал “ $k+l$ ”-й зоны (сдвиг границы вправо, см. рис. 9.1), или, наоборот, материал “ $k+1$ ”-й зоны заменяет собой материал “ $k$ ”-й зоны (сдвиг границы влево). Поскольку изменяется материал, изменяются значения сечений, входящих в оператор  $\hat{L}$ , а также изменяются константы, отвечающие за генерацию вторичного гамма-излучения (см. (9.14)). Отсюда, если мы пользуемся формулой (9.20), возмущения вносятся в источник  $f^*$  (9.18). Мы можем вычислить производную по *координате* в результате сдвига границы “ $k$ ”-й зоны:

$$\frac{\partial D}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta D}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_k} \cdot \left[ -\langle \varphi, (\hat{\delta L}^* \varphi_p^*) \rangle + \langle \varphi, \delta f^* \rangle \right]. \quad (9.22)$$

Следует учесть, что угловые скобки в данном случае, при групповом подходе по энергетической переменной, обозначают для двух произвольных функций  $\Psi$  и  $\Phi$  следующее (см. (8.36), (8.37)):

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \sum_{i=1}^J \int_0^H dx \int_{-1}^1 \Psi^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) d\mu, \quad (9.23)$$

а поскольку возмущения оператора  $\hat{\delta L}^*$  и источника  $\hat{\delta f}^*$  в (9.22) отличны от нуля только в области сдвига  $\Delta x_k$ , интегрирование в (9.23) упрощается:

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \sum_{i=1}^J \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{-1}^1 \Psi^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) d\mu \approx \Delta x_k \sum_{i=1}^J \int_{-1}^1 \Psi^i(x, \mu) \Phi^i(x, \mu) d\mu \quad (9.24)$$

и множитель  $\Delta x_k$  сокращается со знаменателем в (9.22). Далее, производная полной мощности дозы будет состояться из компонент:

$$\frac{\partial D}{\partial x_k} = \frac{\partial D_n}{\partial x_k} + \frac{\partial D_\gamma}{\partial x_k} + \frac{\partial D_{n\gamma}}{\partial x_k}. \quad (9.25)$$

После этого, сопоставляя (9.24), (9.2) и (9.18), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{n,\gamma}}{\partial x_k} = - \left\{ \sum_{i=1}^J \int_{-1}^1 d\mu \varphi^i(x_k, \mu) \left[ \Delta \Sigma^i(x_k) \varphi^{*i}(x_k, \mu) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{j=i-1}^J \int_{-1}^1 \Delta [\Sigma_s^i(x_k) \cdot \bar{g}^{i \rightarrow j}(x_k, \mu, \mu')] \cdot \varphi^{*j}(x_k, \mu') d\mu' \right] \right\}_{n,\gamma}, \quad (9.26) \end{aligned}$$

что соответствует первому слагаемому в (9.22) и двум первым слагаемым в (9.25) для учета независимых нейтронного и гамма компонент:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{n\gamma}}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{J(n)} \int_{-1}^1 d\mu \varphi^{i(n)}(x_k, \mu) \Delta f^{*i(n)}(x_k), \quad (9.27) \\ \Delta f^{*i(n)}(x_k) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{j=1}^J (\gamma) \Delta S^{i(n) \rightarrow j(\gamma)}(x_k) \cdot \Phi_0^{j(\gamma)}(x_k). \end{aligned}$$

Возмущения в (9.26), (9.27), соответствующие возмущениям координаты  $x_k$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta \Sigma^i(x_k) = \Sigma_k^i - \Sigma_{k+1}^i, \quad \Delta S^{i \rightarrow j}(x_k) = S^{i \rightarrow j}(x_k) - S^{i \rightarrow j}(x_{k+1}), \\ \Delta [\Sigma^i(x_k) \cdot \bar{g}^{i \rightarrow j}(x_k, \mu, \mu')] = \Sigma_k^i \cdot \bar{g}_k^{i \rightarrow j} - \Sigma_{k+1}^i \cdot \bar{g}_{k+1}^{i \rightarrow j}, \quad (9.28) \end{aligned}$$

причем в правых частях данных равенств фигурируют, по условию, кусочно-постоянные характеристики среды – константы по слою.

Для окончательного получения компонент градиента мощности дозы по толщинам слоев (9.21) осталось связать производные по координате (9.26), (9.27) с производными по толщинам слоев. Очевидно, что связь координат и толщин такова:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 \\ x_2 & = & X_1 + X_2 = x_1 + X_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_k & = & \sum_{i=1}^{k-1} X_i + X_k = x_{k-1} + X_k \\ \dots & \dots & \dots \\ x_N = H & = & \sum_{i=1}^{N-1} X_i + X_N = x_{N-1} + X_N \end{array} \right. \quad (9.29)$$

Фиксируем, например, координату  $x_{k-1}$  и внесем возмущение сдвигом координаты  $x_k$ . Это и означает вариацию толщины “ $k$ ”-го слоя  $\delta X_k$ . При этом, в соответствии с (9.29), возмущаются все координаты  $x_i$ ,  $i = k, k+1, \dots, N$ , причем  $\Delta X_k = \Delta x_i$ ,  $i = k, k+1, \dots, N$ . Отсюда получаем связь производных, например мощности дозы на поверхности  $x = H$  по координатам границ слоев и по толщинам слоев:

$$\frac{\partial D}{\partial X_k} = \sum_{i=k}^N \frac{\partial D}{\partial x_i}. \quad (9.30)$$

Итак, если мы располагаем возможностью решать в групповом приближении как одномерное уравнение переноса для азимутально-независимых задач (9.8), так и сопряженное уравнение (9.12) – например с помощью программ ANISN, PO3-6 и т.п. и, кроме того, имеем программу решения оптимизационных задач, которая использует, например, градиентный метод (9.1) – (9.4), мы можем, используя соотношения теории возмущений (9.20), решить задачу минимизации мощности полной дозы за защитой в формулировке I.

В заключение данного раздела отметим, что практические задачи оптимизации характеристик защиты гораздо сложнее приведенной выше. Для их решения развиты разнообразные алгоритмы и составлено множество программ. Рассмотренная здесь простая задача иллюстрирует только малую часть всех встречающихся трудностей.

Выбор методов решения уравнения переноса и компьютерных кодов для их реализации принципиально неоднозначен и определяется многими объективными и субъективными факторами. Однако если “мода” на методы и алгоритмы достаточно подвижна, динамична и

короткоживуща, то программная реализация алгоритмов в виде компьютерных кодов, аккумулирующая обычно громадные затраты (сотни человеко-лет), – вещь гораздо более инерционная и живучая. Поэтому изучение идейных и методических основ существующих подходов к решению задач переноса еще долго будет включать знакомство с такими базовыми понятиями, как метод сферических гармоник в его низших приближениях и т.п.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белл Д. Теория ядерных реакторов / Д. Белл, С. Глесстон; пер. с англ. под ред. В.Н. Артамкина. – М.: Атомиздат, 1974. – 494 с.
2. Будаков В.П. Методы решения уравнения переноса излучения: учеб. пособие / В.П. Будаков. – М.: Издат.дом МАИ, 2007. – 52 с.
3. Вейнберг А. Физическая теория ядерных реакторов: пер. с англ. / А. Вейнберг, Е. Вигнер. – М.: ИЛ, 1961. – 241 с.
4. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов / Б. Дэвисон; пер. с англ. под ред. Г.И. Марчука. – М.: Атомиздат, 1960. – 517 с.
5. Казанский Ю.А. Экспериментальная физика реакторов: учеб. пособие для студентов вузов / Ю.А. Казанский, Е.С. Матусевич. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 332 с.
6. Кейз К. Линейная теория переноса: пер. с англ. / К. Кейз, П. Цфайфель. – М.: Мир, 1972. – 192 с.
7. Кураченко Ю.А. Основы теории переноса излучения: учеб. пособие по курсу "Перенос излучений в средах" / Ю.А. Кураченко. – Обнинск: ИАТЭ, 1994. – 73 с.
8. Кураченко Ю.А. Перенос излучений в средах. Методы расчета характеристик полей излучений: учеб. пособие по курсу "Перенос излучений в средах" / Ю.А. Кураченко. – Обнинск: ИАТЭ, 1994. – 112 с.
9. Марчук Г.И. Методы расчета ядерных реакторов / Г.И. Марчук. – М.: Госатомиздат, 1961. – 485 с.
10. Марчук Г.И. Численные методы в теории переноса нейтронов / Г.И. Марчук, В.И. Лебедев. – М.: Атомиздат, 1971. – 412 с.
11. Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов / В.В. Смелов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Атомиздат, 1978. – 324 с.
12. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло / И.М. Соболев. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
13. Физические основы защиты от излучений / Н.Г. Гусев [и др.] – М.: Атомиздат, 1969 и посл.изд. Т.1. – 293 с.

## ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

Авогадро число 17  
Авост (аварийный останов) 103  
Азимутальный угол 83  
Алгоритм  
    выбора 129  
    моделирования 129  
    розыгрыша 129  
Антиградиент 159  
Аппроксимация интеграла рас-  
    сеяния 115

### Б

Барн 15  
Больцман, Людвиг 51

### В

Вес направления 115  
Взаимодействие  
    нейтрон-нейтрон 7  
    спин-орбитальное 140  
    фотон-фотон 7  
    частиц со средой 8  
Вик, Джан Карло 108  
Временной лаг 72  
Время пролета 72

### Д

Датчик случайных чисел 129  
Дельта  
    символ Кронекера 85  
    функция Дирака 11  
Делящиеся материалы  
    плутоний 142  
    уран 47, 142  
Джинс, Джеймс 83  
Дискретизация 109

Дисперсия 132  
Доверительный интервал 132

### З

Задача  
    краевая 39  
    плоскопараллельная 79, 87  
Закон  
    Фика  
        второй 38  
        первый 35  
    ослабления пучка 17  
Закон больших чисел 132

### И

Излучение  
    вторичное гамма 157  
    гамма 157  
    корпускулярное 6  
    нейтральное 6  
    нейтронов 6  
    фотонов 6  
Изотропное рассеяние 90, 142  
Индикатриса рассеяния 58, 85,  
    108, 141  
Интеграл  
    высокой степени кратности 136  
    по замкнутой поверхности 36  
    поверхностный 55  
    рассеяния 61  
Интегральное преобразование 134  
Источник  
    точечный изотропный 41

### К

Карлсон, Бенгт Г. 122  
Квадратура



$ES_n$  116  
 Гаусса 116  
 Координаты полярные 79  
 Коэффициент ослабления пучка 18  
 Коэффициенты ряда 86  
**Л**  
 Лапласиан 27, 42  
 Линейный коэффициент ослабления 18  
 Линейный функционал 137, 149  
 Лопиталь, Гийом Франсуа 48  
 Лучевые эффекты 112  
**М**  
 Магнитный момент нейтрона 7  
 Марковская цепь 136  
 Маршак, Роберт Юджин 91  
 Математическое ожидание 21, 131  
 Мера  
     Лебега 131  
     области 10  
 Метод  
      $S_n$  -метод 122  
     Владимирова 119  
     Карлсона 122  
     Монте-Карло 129  
     градиента 158  
     дискретных ординат 107  
     исключений 130  
     обратных функций 129  
     отбора 130  
     прогонки 104  
     среднегеометрический 123  
     статистических испытаний 129  
     суперпозиции 131  
     сферических гармоник 83  
     характеристик 119  
     экспоненциальный 123  
 Моменты решения 86, 92

**Н**  
 Нормировка  
     индикатрисы 58, 141  
     плотности вероятности 20  
**О**  
 Одноатомный слой 17  
 Октант 116  
 Опасность нейтрона 150  
 Оператор  
     Лапласа 27, 42  
     дифференциальный 27  
     набла 27  
     сопряженный 151  
 Осцилляции решения 112  
**П**  
 Пайерлс, Рудольф Эрнст 76  
 Плачек, Георг 80, 83  
 Плоскопараллельный пучок 53  
 Плотность  
     вероятности деления 143  
     вероятности поглощения 20  
     вещества 17  
     группового потока 147  
     нейтронов  
         фазовая 52  
     переходная 136  
     столкновений 25  
         фазовая 53  
     тока 28  
     фазовая  
         векторная 56  
     ядер  
         объемная 17  
         поверхностная 14  
 Плутониевый проект 83  
 Погрешность  
     среднеквадратическая 132  
 Полиномы Лежандра 83

Поляризация нейтронов 57, 140

Порядок квадратуры 117

Правило

Лопиталья 48

Приближение

$P_1$ -приближение 91

$P_2$ -приближение 94

$P_3$ -приближение 94

групповое 139, 146

диффузионное 92

постоянных сечений 41

Прогонка

обратная 105

прямая 104

Программа

ANISN 107, 128, 165

DOT 107, 128

LANET 138

MCNP 138

MCNPX 138

MCU 138

PALLAS 107

REMP1 105

SABINA 106

АТИКА 105

КАСКАД 107, 128

ПРИЗМА 138

РАДУГА 107, 128

РАПИД 105

РОЗ 107, 128, 165

Программирование

линейное 158

нелинейное 158

Пространство

околореакторное 51

Процесс

безытерационный 105

итерационный 82, 159

Пучок нейтронов 52, 140

## Р

Радиационный захват 14

Разложение в ряд

по полиномам Лежандра 87

по сферическим гармоникам  
86

Разностная аппроксимация 97

Рассеяние

анизотропное 51

изотропное 66

Реакторный диапазон энергий 7

Редукция уравнения 77

Ряд

Неймана 134, 135

Тейлора 32

Фурье 86

## С

Сгущение сетки 112

Сетка

узлов 97

Сечение

групповое 148

дважды дифференциальное 16

деления 15, 18

дифференциальное 16

захвата, не приводящего к де-  
лению 47

интегральное 15

макроскопическое 18

микроскопическое 15

поглощения 15, 18

полное 15, 18

рассеяния 15, 18

Симметрия

азимутальная 65, 87, 159

гексагональная 113

сферическая 68

тороидальная 113

цилиндрическая 67

Система

полная ортогональная 84  
уравнений

двухточечная 99  
конечно-разностная 99  
уравнений,  
бесконечная 86  
Случайные  
величины 129  
числа 129  
Соотношение  
балансное 36  
рекуррентное 83  
Сопряжение по Лагранжу 150  
Спин нейтрона 7  
Среда  
без взаимодействия 42  
бесконечно протяженная 47  
диффузионная 42  
поглощающая 42  
полубесконечная 20, 22  
Среднее  
арифметическое 21, 132  
геометрическое 123  
Средняя длина пробега 19  
Стандартное отклонение 132  
Статистика  
Бозе-Эйнштейна 7  
Сферические гармоники 83, 85  
Схема  
алмазная 123  
взвешенная 123  
конечно-разностная  
трехточечная 99, 121  
линейная 111  
положительная 111  
трехточечная 111  
шаговая 123

## Т

Тело  
абсолютно черное 39  
выпуклое 39  
невогнутое 39, 63  
односвязное 39

Теорема  
Остроградского-Гаусса 37, 55,  
60, 144, 151  
о среднем 11, 20, 57, 133, 141  
сложения полиномов Лежандра 89  
центральная предельная 132  
Теория  
возмущений 153  
оптимального управления 158  
Ток  
нейтронов  
векторный 35  
диффузионный 34  
Траектория 136  
Требования к алгоритму  
консервативность 110  
монотонность 110  
неотрицательность 110  
простота 111  
универсальность 111  
устойчивость 110

## У

Уравнение  
Больцмана 51  
Пайерлса 76, 134  
Фредгольма 136  
баланса 27  
газокинетическое 51  
гипергеометрическое 84  
групповое 148  
диффузии 27  
стационарное 38  
диффузионное 111  
интегральное 71  
интегродифференциальное 61,  
70, 71  
квази- $P_1$  96  
кинетическое 51  
конечно-разностное 97

двухточечное 99  
трехточечное 99  
многоскоростное 145  
переноса 51  
переноса интегральное 76  
сопряженное 150  
Ускорения сходимости методом  
    баланса 127  
Условие  
    Маршака 91  
    непрерывности 97

## **Ф**

Фик, Адольф 35, 38  
Формула  
    Лагранжа 121  
    Родрига 83  
    Эйлера 98  
    квадратурная 98, 109  
    рекуррентная 129  
    теории возмущений 154  
Функция  
    Лежандра присоединенная 84  
    Плачека 80  
    аддитивная 10  
    интегральная показательная  
        80

источника 12  
кумулятивная 130  
мажоритирующая 130  
области 10  
плотность распределения 130  
пробная 66  
распределения 129, 130  
сеточная 105  
сопряженная 150  
специальная 83

## **Ц**

Ценность нейтрона 150

## **Ч**

Чандрасекар, Субрахманьян 108  
Числа  
    псевдослучайные 129  
    случайные 129

## **Я**

Ядерный реактор 155  
Ядро оператора 134  
Язык программирования  
    фортран 138

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Основные положения</b>	<b>5</b>
1.1. Среда и излучение . . . . .	5
1.1.1. Термины и определения . . . . .	5
1.1.2. Излучение и частицы . . . . .	6
1.2. Функции и производные . . . . .	10
1.3. Источники и геометрии . . . . .	12
1.4. Реакции и сечения . . . . .	14
1.5. Барьер и пучок . . . . .	16
1.6. Средняя длина свободного пробега . . . . .	19
1.7. Плотность столкновений . . . . .	22
<b>Глава 2. Односкоростное диффузионное уравнение</b>	<b>27</b>
2.1. Оператор Лапласа . . . . .	27
2.2. Плотность диффузионного тока нейтронов . . . . .	27
2.3. Вывод диффузионного уравнения . . . . .	36
2.4. Ограничения диффузионного приближения . . . . .	38
2.5. Граничные условия для диффузионного уравнения . . . . .	39
2.6. Задачи на уравнение диффузии . . . . .	41
2.6.1. Точечный изотропный источник в однородной бесконечной среде . . . . .	41
2.6.2. Бесконечный плоский источник . . . . .	44
2.6.3. Вычисление критического размера шарового го- могенного реактора . . . . .	47
<b>Глава 3. Односкоростное кинетическое уравнение переноса</b>	<b>51</b>
3.1. Вводные понятия . . . . .	51
3.2. Плотность кинетического тока нейтронов . . . . .	53
3.3. Вывод кинетического уравнения . . . . .	56
3.4. Граничные условия для кинетического уравнения . . . . .	62
3.5. Кинетическое уравнение в декартовой системе координат . . . . .	63
3.6. Плоскопараллельные задачи . . . . .	64
3.7. Кинетическое уравнение в цилиндрической системе ко- ординат . . . . .	67

3.8. Кинетическое уравнение в сферической системе координат . . . . .	68
<b>Глава 4. Интегральное уравнение переноса</b>	<b>71</b>
4.1. Ограничения, связанные с интегральным уравнением . . . . .	71
4.2. Вывод интегрального уравнения переноса . . . . .	72
4.3. Редукция интегродифференциального уравнения . . . . .	76
4.4. Интегральное уравнение для плоскопараллельной задачи	79
<b>Глава 5. Метод сферических гармоник</b>	<b>83</b>
5.1. Специальные функции . . . . .	83
5.2. Разложение по сферическим гармоникам . . . . .	85
5.3. МСГ для плоскопараллельной задачи . . . . .	87
5.4. Граничные условия в МСГ . . . . .	90
5.5. $P_1$ -приближение МСГ . . . . .	91
5.6. Связь $P_1$ -приближения МСГ с диффузионным приближением . . . . .	92
5.7. $P_2$ - приближение МСГ . . . . .	94
5.8. $P_3$ - приближение МСГ . . . . .	94
5.9. Редукция $P_2$ - уравнений МСГ к $P_1$ - уравнениям . . . . .	95
5.10. Разностная аппроксимация $P_1$ - уравнений . . . . .	97
5.11. Трехточечные разностные уравнения диффузионного типа . . . . .	99
5.12. Решение уравнений методом “прогонки” . . . . .	104
<b>Глава 6. Метод дискретных ординат</b>	<b>107</b>
6.1. Общие положения . . . . .	107
6.2. Особенности практических задач переноса излучения . . . . .	109
6.3. Основные требования к современному алгоритму МДО	110
6.4. Геометрические модели . . . . .	113
6.5. Аппроксимация интеграла рассеяния . . . . .	115
6.6. Метод характеристик (метод Владимирова) . . . . .	119
6.7. $S_n$ -метод (метод Карлсона) . . . . .	122
6.8. Итерационное решение разностных уравнений МДО . . . . .	124
<b>Глава 7. Метод Монте-Карло</b>	<b>129</b>
7.1. Основы метода ММК . . . . .	129
7.2. Вычисление интегралов . . . . .	131
7.3. ММК в задачах переноса излучения . . . . .	133

---

<b>Глава 8. Многоскоростное уравнение переноса</b>	<b>139</b>
8.1. Уравнение с энергетической зависимостью . . . . .	139
8.2. Групповой подход в задачах переноса . . . . .	146
8.3. Сопряженные функции и уравнения . . . . .	149
8.4. Теория возмущений . . . . .	153
<b>Глава 9. Задачи оптимизации характеристик поля излучения</b>	<b>157</b>
9.1. Общая формулировка задачи . . . . .	157
9.2. Оптимизация функции . . . . .	158
9.3. Многогрупповая задача . . . . .	159
9.4. Теория возмущений в задаче оптимизации . . . . .	162
<b>Библиографический список</b>	<b>167</b>
<b>Предметно-именной указатель</b>	<b>168</b>

*Учебное издание*

Огородников Игорь Николаевич

**Введение в теорию переноса  
ионизирующих излучений**

Редактор *Л.Ю. Козяйчева*

Компьютерная верстка *И.Н. Огородникова*

---

Подписано в печать	12.01.2010	Формат 60×84 $\frac{1}{16}$
Бумага писчая	Цифровая печать	Усл. печ. л. 10,23
Уч.-изд. л. 9,4	Тираж 50 экз.	Заказ 1

---

Редакционно-издательский отдел УГТУ-УПИ  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19  
rio@mail.ustu.ru

Отпечатано в отделении полиграфии ИВТОБ УГТУ-УПИ  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19  
Тел. (343) 375-41-33

ISBN 978-5-321-01688-6



9 785321 016886